

# Etude Probabiliste d'un Système Mécanique à Paramètres Incertains par une Technique Basée sur la Méthode de Transformation

Seifedine Kadry<sup>(1)</sup>, Rafic Younés<sup>(2)</sup>

(1) Université de Technologie de Belfort-Monbéliard, Laboratoire M3M, Belfort - France

(2) Faculté de Génie - Université Libanaise, Equipe 3M, Beyrouth, Liban

[seifo303@hotmail.com](mailto:seifo303@hotmail.com), [ryounes@ul.edu.lb](mailto:ryounes@ul.edu.lb)

## Résumé

Dans cet article on a combiné la méthode de transformation et la méthode des éléments finis pour évaluer la fonction de densité de probabilité « fdp » d'un système mécanique ayant des paramètres internes incertains.

*Mots clés : étude de sensibilité, éléments finis, méthode de transformation, équation différentiel stochastique (EDS).*

## 1. Introduction

La théorie des probabilités est utilisée en Mécanique depuis plusieurs décennies et est aujourd'hui de plus en plus utilisée pour modéliser, d'une part les phénomènes aléatoires (turbulence, onde sismique, houle, charges mobiles, ...) qui interviennent comme excitation des systèmes mécaniques, des structures et d'autre part, les milieux aléatoires (matériaux composites, bétons, sols, structures multicouches, ...). L'approche probabiliste prend en compte les incertitudes aléatoires sur les données de ces modèles en vue d'améliorer la robustesse des prévisions et de l'optimisation. Elle permet aussi d'effectuer des études de sensibilité en prenant en compte tout le domaine de variation de l'ensemble des paramètres influents en un seul calcul, ce qui n'est pas le cas de l'approche déterministe.

La solution d'une équation différentielle stochastique est obtenue quand on évalue la fonction de densité de probabilité de cette solution. On peut utiliser plusieurs méthodes comme l'équation Fokker-Planck [3], la technique de transformation [4], le développement de Wiener-Hermite [6], la méthode de perturbation [1], la méthode de linéarisation locale stochastique [5], la méthode de décomposition [7] et la méthode d'éléments finis stochastiques [2].

## 2. Méthodologie

La technique de transformation évalue la « fdp » de la sortie d'un système en multipliant celle de l'entrée par le Jacobien de la transformation inverse [4]. Soit  $y = f(x)$  un système formé de  $n$  équations à  $n$  inconnus, donc

$$fdp(y) = |J| \cdot fdp(x)$$

Avec

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dots & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

La méthode de transformation présente des limites dans la recherche de la probabilité de la sortie  $fdp(y)$  connaissant la probabilité d'entrée  $fdp(x)$  :

1) Il n'est pas toujours évident de trouver la fonction inverse  $x = f^{-1}(y)$ ,

2) Il faut que la fonction soit bijective pour qu'on puisse calculer son inverse,

3) Et il faut un déterminant non nul pour le Jacobien.

Pour éviter les limitations de la technique de transformation, nous traitons d'abord un système à  $n$  entrées et une seule sortie  $y_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Nous pouvons procéder comme suit :

$$\text{Soit } F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ avec } F(X) = \begin{cases} y_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_i = x_i \quad i = 2, \dots, n \end{cases}$$

**Théorème :** la fonction  $F$  (définie ci-dessus) est inversible.

**Preuve :** la fonction  $F$  est inversible si et seulement si le déterminant du Jacobien est non nul, en effet

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \neq 0$$

(Au moins il existe  $i$  tel que  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0$ ). Par suite  $F^{-1}$  existe.

D'où l'algorithme suivant :

### Algorithme :

1- Utiliser la méthode des éléments finis déterministe pour exprimer le problème sous forme  $MU = F$  où  $M$  est la matrice de rigidité,  $U$  est le vecteur des déplacements et  $F$  est le vecteur des forces.

2-  $M$  est fonction des paramètres incertains  $c$  :  $M = M(c)$ . Chercher la fonction inverse exprimant les paramètres incertains on fonction des déplacements.

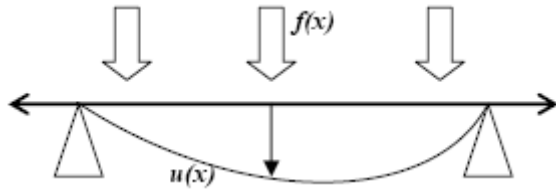
3- Calculer le déterminant du Jacobien figurant dans la technique des transformations en utilisant le théorème précédent.

4- Calculer  $fdp(y_i) = \int_{D(x_i)} |J| \cdot fdp(x) \cdot dx_i$

5- Fin

## 3. Application :

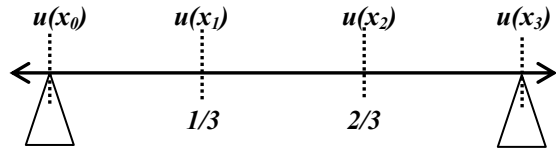
Dans cet article nous avons utilisé cette technique pour évaluer la « fdp » d'un système mécanique formé d'une poutre de longueur unité, de poids  $P$ , soumise à une densité de charge  $f(x)$  et simplement appuyée à ses extrémités.  $f(x) = 0$  aux extrémités  $x = 0$ , et  $x = 1$ .



L'équation qui modélise la flèche  $u(x)$  au point d'abscisse  $x$  est représentée par l'équation différentielle du second ordre suivante [8] :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Avec  $c(x) = \frac{P}{E}I(x)$ , où  $E$  est le module de Young du matériau et  $I(x)$  est le moment principal d'inertie de la section de la poutre au point  $x$ .  $c(x)$  est considéré le paramètre incertain de la structure dans notre cas. Si  $c \geq 0$  sur  $]0, 1[$ , on peut montrer que ce problème a une et une seule solution. Sauf pour quelques cas très rares, il n'existe pas de formule permettant d'obtenir explicitement  $u(x)$ , pour tout  $x$  dans  $]0, 1[$ .



La résolution du problème par la méthode d'éléments finis de degré 1 permet la construction de la matrice  $M$ , du vecteur  $F$  et la résolution du système linéaire  $MU = F$ . Adoptons le cas de 4 points de discrétisation et posons  $u(x_i) = u_i$ ,  $f(x_i) = f_i = 6x_i$ . Alors [8] :

$$M = \begin{bmatrix} 6 + \frac{c_1}{3} & -3 \\ -3 & 6 + \frac{c_2}{3} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

On peut résoudre facilement ce système, soit pour  $u_2$  :

$$u_2 = \frac{1}{3} \frac{(30 + \frac{4c_1}{3})}{(6 + \frac{c_1}{3}) \cdot (6 + \frac{c_2}{3}) - 9}$$

En utilisant le théorème du paragraphe précédent, on trouve le Jacobien suivant :

$$|J| = \frac{18 \cdot (36 + c_2)}{(18u_2 + u_2 \cdot c_2 - 4)^2}$$

Dans l'hypothèse simple d'une loi de probabilité uniforme pour  $c_1$  et  $c_2$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ , la densité de probabilité de  $u_2$  déduite de l'application de l'algorithme précédent devient :

$$fdp(u_2) = \int |J| \cdot fdp(c_1) \cdot fdp(c_2) \cdot dc_2$$

D'où une fonction définie par intervalle comme suit :

$$0.3358 < u_2 < 0.3448 \rightarrow fdp(u_2) = \frac{-2}{(19 \cdot u_2 - 4) \cdot u_2^2} [I_1]$$

$$I_1 = \log \left[ \frac{9 \cdot u_2 + 2}{19 \cdot u_2 - 4} \right] [171 \cdot u_2 - 36] - 687.78 \cdot u_2 + 214.90$$

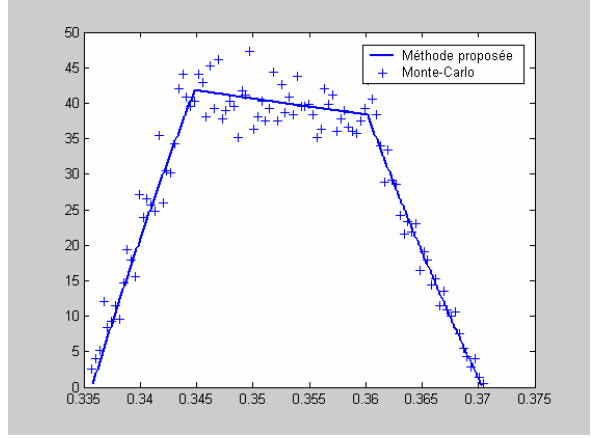
$$0.3448 < u_2 < 0.3602 \rightarrow fdp(u_2) = \frac{4.9732}{u_2^2}$$

$$0.3602 < u_2 < 0.370 \rightarrow fdp(u_2) = \frac{18}{(9 \cdot u_2 - 2) \cdot u_2^2} [I_2]$$

$$I_2 = \log \left[ \frac{9 \cdot u_2 + 2}{9 \cdot u_2 - 2} \right] [9 \cdot u_2 - 2] - 39.48 \cdot u_2 + 12.77$$

#### 4. Simulation et conclusion :

Pour la simulation, Nous trouvons la figure suivante décrivant la « fdp » de  $u_2$ . Nous pouvons remarquer la similitude avec la méthode de Monte-Carlo. La généralisation du problème à  $m$  sorties est assez simple. Ainsi, la première limitation est résolue par l'écriture du problème en éléments finis. Les deux autres en utilisant le théorème et l'algorithme expliqués ci-dessus.



#### Références:

- [1]: V. Mangon, Méthode de perturbation globale pour détecter les dynamiques chaotiques. *FUNDP 1997*.
- [2]: O. Dessombz, Analyse dynamique de structures comportant des paramètres incertains. *These ECL, France 2001*.
- [3]: S.F. Wojtkiewicz and L.A. Bergman: Numerical solution for high dimensional Fokker-Planck equations. *ASME 2001*.
- [4]: Numerical recipes en C: the art of scientific computing (*Chapter 7: transformation method*)
- [5]: J.C. Jimenez et al.: simulation of stochastic differential equations through the local linearization method. *Journal of statistical physics 1999*.
- [6]: T. Y. Hou and B. Wetton, Convergence of a finite difference scheme for the Navier-Stokes equations using vorticity boundary condition, *SIAM 1992*.
- [7]: S. Champier, Résolution du problème de Wicksell par une méthode de décomposition en Ondelettes Vaguelettes. *UPRES-EA-3058 Avril 2000*.
- [8]: T. Gmür, Dynamique des structures. *Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. 1997*.