

**MODELISATION ANALYTIQUE ET NUMERIQUE DES
CARACTERISTIQUES MECANQUES D'UN COMPOSITE A RENFORT
CARBONE 3D ORTHOGONAL**

**ANALYTICAL AND NUMERICAL MODELING OF MECHANICAL
CHARACTERISTICS OF ORTHOGONAL 3D CFRP**

Ch. EL Hage^{*}, R. Younès^{**}, Z. Aboura^{***}, M.L. Benzeggagh^{*}, M. Zoater^{**}

^{*} Université de Technologie de Compiègne, Laboratoire Roberval

^{**} Université Libanaise, Faculté de Génie, Beyrouth, Liban

^{***} L3M IUT de Tremblay-en-France Paris 8

e-mail : aboura@utc.fr

RESUME

Cette étude propose un modèle analytique et numérique pour la prédiction des propriétés mécaniques des matériaux composites à renfort orthogonal 3D en tenant compte de leurs paramètres structuraux (propriétés mécaniques des constituants et géométries de l'architecture). Cette démarche nécessite au préalable la définition d'un volume élémentaire représentatif (VER).

Des études au microscope électronique à balayage ont permis de visualiser l'aspect architectural de la structure interne. A partir de ces observations deux types de VER, adaptés aux types de modélisation (analytique et par éléments finis), ont été définis. Le premier prend en compte l'ensemble du matériau dans son épaisseur intégrant ainsi les particularités des strates et des renforts verticaux. Le second, fortement simplifié afin de minimiser les coûts de calculs, est utilisé dans l'approche par EF. De plus le modèle analytique est étendu à la prédiction des propriétés ultimes en utilisant le critère tensoriel 3D de Tsai. Les résultats issus de ces modélisations sont comparés à des résultats expérimentaux. Cette comparaison permet de montrer l'intérêt et les limites de chaque approche en mettant en évidence l'effet du choix du VER.

ABSTRACT

This study proposes an analytical and numerical model, for the prediction of the mechanical properties of orthogonal 3D reinforcement composite materials, taking into account their structural parameters (mechanical properties of the components and geometrical of architecture). This step requires as a preliminary the definition of a representative elementary volume (REV).

Microscope studies made possible to visualize the architectural aspect of the internal structure. From these observations two types of REV, adapted to the types of modeling (analytical and by finite elements), were defined. The first takes into account the whole of material in its thickness thus integrating the characteristics of the layers and the vertical reinforcements. The second, strongly simplified in order to minimize the costs of calculations, is used in the approach by FE. Moreover the analytical model is extended to the prediction of the ultimate properties by using the tensorial criterion 3D of Tsai. The results obtaining from these modeling are compared with experimental results. This comparison makes it possible to show the interest and the limits of each approach by highlighting the effect of the choice of the REV.

MOTS CLES: 3D orthogonal; Homogénéisation, Modélisation, Eléments finis

KEYWORD: 3D orthogonal; Homogenization, Modeling, Finite Elements

INTRODUCTION

L'intérêt de l'introduction de renforcements hors plan dans les matériaux composites n'est plus à démontrer. Outre l'augmentation des performances mécaniques dans la troisième direction, ce renforcement permet également d'améliorer considérablement la résistance interlaminaire de ces matériaux. Si les techniques de tissage permettent de proposer des préformes 3D très complexes, le défi actuel consiste à développer des outils capables de prédire le comportement mécanique de ces matériaux à partir des paramètres géométriques structuraux. Cette démarche s'inscrit dans la continuité de travaux initiés dans les années 80 qui se poursuivent actuellement et qui consistent à modéliser le comportement de composites à renforts tissés 2D. Dans les premiers modèles, seule l'ondulation dans le sens trame était prise en compte, (Ishikawa et al. 82). Ces modèles ont évolués pour prendre en compte l'ondulation dans le sens trame également (Aboura et al. ,93) et le décalage relatif des couches. En 1994, Sankar et al. ont proposé un modèle analytique appelée Selective Averaging Method (SAM) : cette approche est basée sur une combinaison de moyenne en rigidité et compliance pour estimer les propriétés thermoélastiques 3D.

Scida et al. (98) proposent un modèle analytique d'homogénéisation par sommations des rigidités moyennes de chaque volume discrétisé de la cellule élémentaire, pour prévoir les propriétés tridimensionnelles des tissés 2D. Ping et al, 2000 proposent une modélisation du comportement élastique d'un orthogonal 3D en utilisant des modèles analytiques similaires, baptisés XYZ, YXZ, ZXY et ZYX basés sur les conditions d'isocontrainte et d'isodéformation sur des micro-éléments du volume élémentaire représentatif (VER) répartis en série ou en parallèle.

Il s'agit dans cet article de modéliser le comportement mécanique (élastique et à rupture) d'un matériau composite à renfort carbone orthogonal 3D. La démarche concerne l'étude de deux VER. Un modèle analytique inspiré des travaux de Scida et al (98) est appliqué sur chaque cellule de base. Les résultats obtenus sont confrontés à ceux obtenus par le modèle ZYX, à une démarche de type éléments finis basée sur le principe d'optimisation la fonctionnelle (Duisinx, 96) et à des résultats expérimentaux. L'effet du choix de la cellule de base est alors mis en évidence.

La rupture, en traction uniaxiale, est également prédite par le modèle et comparé aux résultats expérimentaux. Elle utilise le critère 3D de Tsai-Wu, en ayant recourt à la base de donnée établie par Khellil, 93.

PRESENTATION DES MATERIAUX

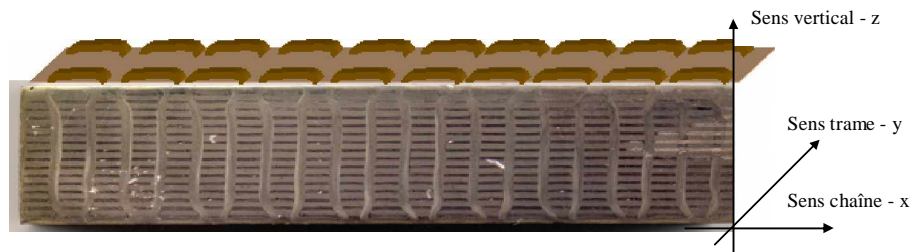


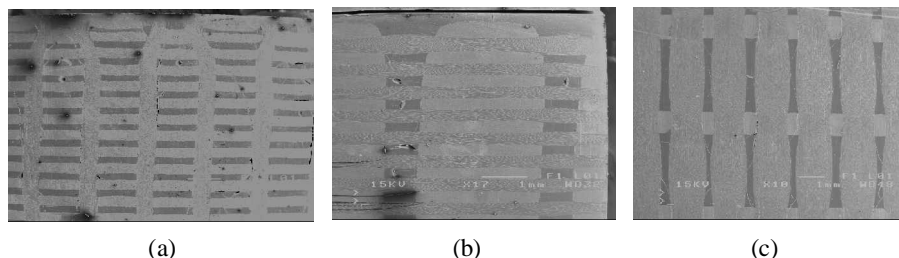
Figure 1 : Représentation du matériau 3D orthogonal
Presentation of 3D orthogonal material

Le matériau de cette étude est un composite à fibres de carbone T300J et à architecture 3D orthogonale, de 8mm d'épaisseur et de résine Epoxy RTM6. La préforme est tissée suivant les trois directions orthogonales d'un repère cartésien. Les renforts dans la troisième direction juxtaposent les mèches longitudinales et transversales tout le long de l'épaisseur. Ils sont verticaux au cœur de la préforme, et prennent ensuite une forme de courbure concave dans les semelles. L'ensemble du renfort forme une géométrie à architecture interne structurée, bien ordonnée. La figure 1 représente une combinaison d'une section longitudinale du matériau de l'étude et d'une schématisation de la face supérieure.

Les proportions de mèches données par le fournisseur sont de 46% en sens chaîne, 46% en sens trame et 8% en renfort vertical. Idéalement, le matériau devrait présenter une symétrie matérielle de fibre dans le plan xy par rapport à l'axe de la première bissectrice de ce plan.

Etude microscopique

Les observations réalisées sur un microscope électronique à balayage associées à des analyses d'images, montrent que cette symétrie matérielle n'est pas parfaitement respectée. En fait, le compactage de la préforme dans le moule, suivi de l'injection de la résine crée un déséquilibre entre les dimensions géométriques des mèches dans le sens chaîne et trame, engendrant ainsi une anisotropie. L'analyse des images microscopiques obtenues permet de déterminer l'ensemble des caractéristiques géométriques de la structure nécessaires à la modélisation. Les sections des mèches dans les trois directions sont sensiblement rectangulaires (Fig. 2). Néanmoins, la section horizontale montre que les mèches en sens trame présentent des rétrécissements dus aux passages des renforts verticaux (Fig. 2c).



(a) (b) (c)
 Figure 2 : Etudes microscopiques de l'architecture 3D orthogonale:
 (a): Section longitudinale. (b): Section transversale. (c): Section horizontale.
Microscopic studies of 3D orthogonal:
 (a): longitudinal section. (b): transversal section. (c): horizontal section

Concernant le renfort vertical, la proportion de mèches verticale et ondulée a été déterminée. Ainsi la partie verticale du renfort représente 64.14% du total de la mèche et chaque partie courbée de la mèche 17.93%. Ce résultat permet d'estimer un rayon de courbure moyen de 0.6322 mm de la mèche (aux extrémités supérieure et inférieure du matériau) par rapport à l'axe de la verticale.

MODELISATIONS ANALYTIQUES

Le principe de la modélisation consiste à choisir un volume élémentaire représentatif (VER). Ce dernier est décomposé en fonction de ses constituants. Le

comportement élastique de chaque constituant est alors exprimé par une matrice de rigidité tridimensionnelle $[C_{ij,k}]$. Dans le cas où le constituant correspondrait à la mèche, la matrice de rigidité est exprimée dans le repère de la mèche (repère 123) puis transformée dans le repère de la cellule de base (repère xyz) en tenant compte de l'orientation de la mèche.

La connaissance des matrices transformées pour chaque constituant k permet de déduire la matrice de rigidité globale de la cellule de base selon la relation [1] en tenant compte des fractions volumiques de chaque constituant . (V_t étant le volume total du VER, V_k le volume de chaque constituant)

$$C_{ij,Globale} = \frac{1}{V_t} \sum_{k=1}^n V_k \cdot C'_{ij,k} \quad ; \text{ pour } i=1,\dots,6 \text{ et } j=1,\dots,6 \quad [1]$$

D'autre part, dans un souci de confrontation de cette démarche avec celles de la littérature, le modèle ZYX de Ping et al, (2000) basé sur le principe d'isocontrainte et d'isodéformation est également appliqué aux matériaux de cette étude.

Choix du VER :

La périodicité géométrique d'un composite est décrite de manière conventionnelle en terme de cellule de base ou VER. Elle est définie par la condition que le composite tout entier peut être construit à partir de copies de celle-ci translattées dans l'espace. La réponse d'un composite à un chargement peut alors être calculée en analysant le comportement de cette seule cellule de base.

Pour chaque structure périodique, il y a une multitude de choix possibles. Les symétries dans un composite orthogonal 3D associés à un souci de simplification des calculs imposent deux voies principales :

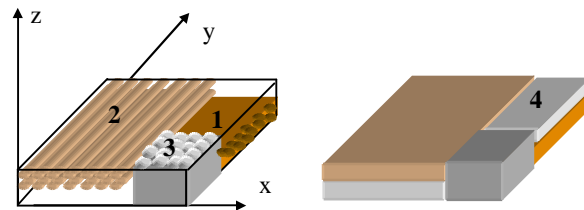


Figure 3: Représentation schématique du VER de la cellule unitaire

Schematic presentation to the VER of unit cell modeling

a) Cellule unitaire (CU)

Ce VER néglige l'ondulation supérieure et inférieure du renfort vertical. De ce fait il est alors possible de proposer une cellule élémentaire très simple et par conséquent nécessitant un temps de calcul réduit. Ce VER est constitué de compartiments de mèches et résine, de forme parallélépipédique, juxtaposés les uns aux autres comme le montre la figure 3. Il ressort alors le VER de

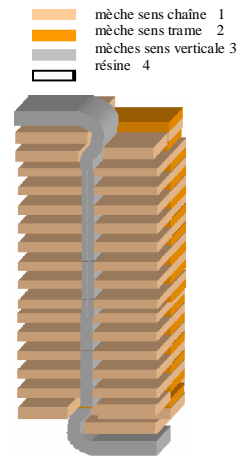


Figure 4: Représentation schématique du VER de la cellule globale.

Schematic presentation to the VER of global cell

volume 0.6005mm^3 dont les volumes de chaque constituant et leur proportion sont donnés dans le tableau 1.

b) Cellule globale (CG)

Ce VER prend en compte la forme réelle de la mèche verticale, sur la totalité de l'épaisseur du matériau (Fig. 4).

Les 16 mèches sens chaîne et trame sont alors modélisées par des compartiments de forme parallélépipédiques. La mèche verticale est modélisée par cinq types de compartiment choisi selon les orientations des fibres : deux horizontales au niveau des surfaces, deux en forme de courbure au niveau des semelles supérieure et inférieure et une la verticale. La courbure de la mèche est modélisée sur la base de quatre cercles tangents de rayon moyen égale à $3/2$ la largeur de la mèche verticale, soit 0.675mm . Cette valeur est sensiblement égale à la valeur moyenne de 0.63mm déterminée par l'analyse microscopique. Le détail de la modélisation de la courbure est représenté en (Fig. 5). Le volume total du VER de la cellule globale est de 21.352mm^3 , les volumes des constituants et leur proportion sont donnés dans le tableau 1.

les constituants	Volume des constituants du VER (mm^3)		Proportion des volumes dans le VER	
	unité de cellule (UC)	Cellule globale (CG)	unité de cellule (CU)	Cellule globale (CG)
la mèche sens chaîne	0.1851	5.9233	30.82 %	27.74 %
la mèche sens trame	0.2570	7.7988	42.80 %	36.53 %
la mèche sens verticale	0.0395	1.9239	6.58 %	9.01 %
les compartiments de résine	0.1189	1.9239	19.80 %	26.72 %

Tableau 1: Volumes et proportions des constituants des VER
Volumes and proportions of the REV constitutive

Pour pouvoir appliquer le modèle d'homogénéisation par son expression [1], la modélisation analytique (CG) génère le calcul des matrices de rigidité $C'_{ij,k}$ fonction de l'orientation des fibres tout le long des courbures représentés par leur fibre moyenne.

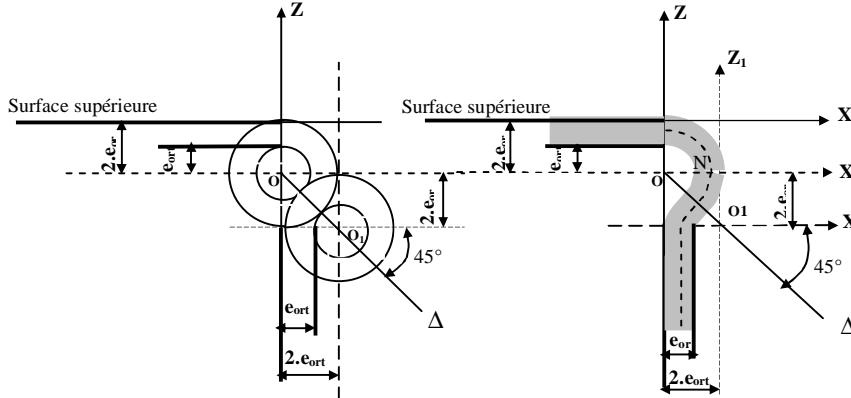
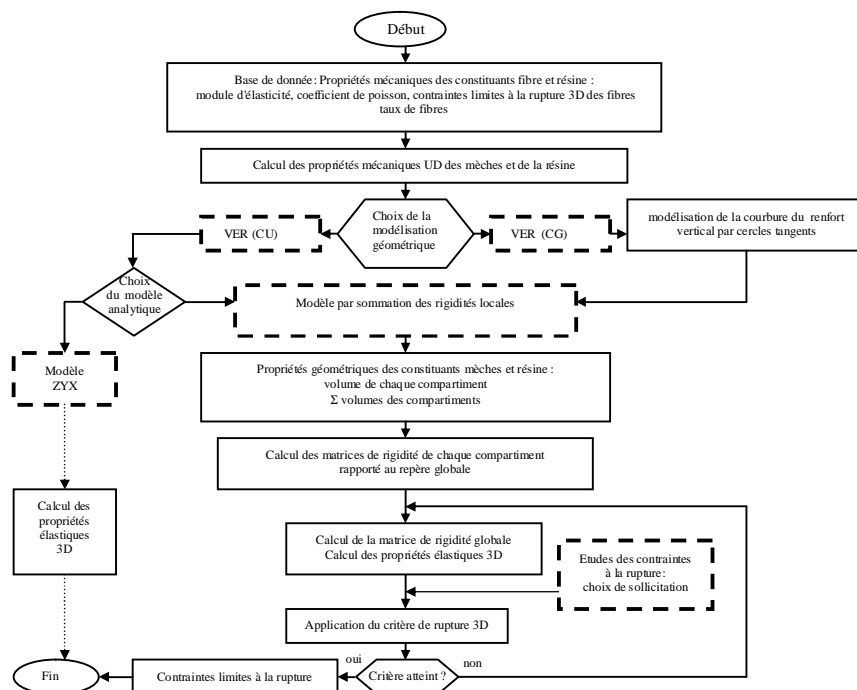


Figure 5: Modélisation de la courbure de la mèche verticale dans le VER (CG)
Modeling of the curve part of the vertical yarn in the REV of global cell

Propriétés mécaniques 3D

Les propriétés élastiques 3D : E_L , E_T , E_H , G_{LT} , G_{LH} , G_{TH} , ν_{LT} , ν_{LH} , ν_{TH} sont déterminées pour chaque type de modélisation par une succession d'étape représentées dans l'organigramme ci-joint. Le calcul se base sur les propriétés géométriques des cellules de base ainsi que sur les propriétés mécaniques des constituants.



Propriétés ultimes

La modélisation élastique est entendue au cas des propriétés ultimes notamment en traction uniaxiale. La détermination des rigidités locales permet, en effet, de déterminer les états de contraintes locaux pour un niveau de chargement macroscopique donnée. Un critère de rupture 3D de type Tsai-Wu qui prend en compte l'effet tridimensionnel de la texture du matériau est alors appliqué à chaque incrément de chargement.

L'écriture tensorielle du critère est: $F_i \bar{\sigma}_i + F_{ij} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j = 1$; pour : $i, j = 1, \dots, 6$

Les termes linéaires F_i et F_{ii} ainsi que les contraintes ultimes de cette expression sont déterminés par essais de traction, compression et cisaillement sur les constituants ou encore, dans certains cas issus de la littérature. La complexité de l'utilisation d'un tel critère réside en fait, dans la détermination des coefficients d'interactions F_{ij} ; pour $i \neq j$. Pour ce qui est de cette étude, les coefficients utilisés sont issus des travaux de Khellil, 93.

MODELISATION NUMERIQUE

Plusieurs techniques numériques sont proposées dans la littérature afin d'homogénéiser un matériau orthotrope. On citera en autres :

- Théorie des modules effectifs sous deux approches possibles en déformation ou en contraintes
- Méthode d'homogénéisation périodique
- Approche énergétique

Toutes ces techniques exigent un VER vérifiant la symétrie matérielle sur les trois plans d'orthotropies (Fig. 6). Cette étude utilise pour une approche énergétique basée sur le principe d'optimisation de la fonctionnelle (Duysinx, 96) :

$$\Pi(a) = \frac{1}{2} \iiint [\varepsilon]^T \cdot [\sigma] \cdot d\Omega - \iint a \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{n} \cdot dS$$

La première intégrale constitue l'énergie de déformation dans le VER et la deuxième représente les travaux appliqués par les forces sur les limites du VER. Toutes ces variables doivent être exprimées en fonction du déplacement 3D dans le volume élémentaire. La discrétisation du VER en un ensemble de fonctionnelle se fait comme suit :

$$\frac{1}{2} \iiint [\varepsilon]^T \cdot [\sigma] \cdot d\Omega = \frac{1}{2} \sum_e Q_e^T \cdot K_e \cdot Q_e = \frac{1}{2} Q^T \cdot K \cdot Q$$

$$\iint a \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{n} \cdot dS = \sum_e F_e^T \cdot Q_e = Q^T \cdot F$$

Q_e est le vecteur déplacement sur chaque trièdre du VER maillé, K_e est la matrice de rigidité correspondante, F^T est la force sur les trièdres des frontières.

L'homogénéisation exige la résolution du problème précédent dans six situations de chargement différentes : trois tractions simples suivant les axes longitudinaux, transversaux et verticaux, ainsi que trois torsions simples autour des même axes.

L'homogénéisation exige également la prise en compte, au niveau de l'assemblage de la matrice de rigidité, d'une condition aux limites supplémentaire exprimant une égalité entre les déformations axiales ou angulaires sur les frontières sollicitées en traction ou en torsion.

Cette approche numérique est faite sous environnement MatLab. Elle donne une convergence rapide vers les modules d'Young dès un nombre faible de trièdres de maillage (592). Par contre la convergence vers les coefficients de cisaillement nécessitent un nombre élevé d'éléments (37577).

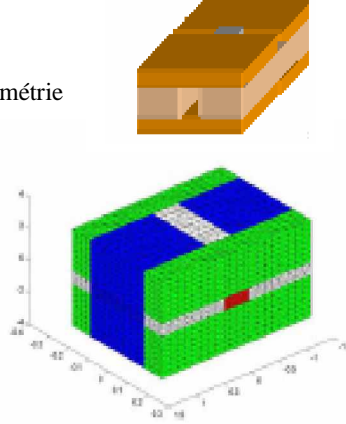


Figure 6: Maillage du VER
VER meshing

RESULTATS ET DISCUSSION

Les propriétés mécaniques de chaque type de mèche, sens chaîne trame et verticale, déterminés analytiquement (Berthelot 92) diffèrent selon le VER choisi. En effet les volumes des constituants évoluent, par contre la fraction volumique totale du composite est maintenue constante pour les deux VER (tableau 3). Le tableau 4 présente les

propriétés élastiques 3D obtenus par chacun des modèles analytiques et éléments finis. Ils sont comparés à quelques résultats de tests expérimentaux effectués sur ce matériau.

Méthode analytique	Propriétés mécaniques des mèches							
	Type de mèche	Vf	E _L (Gpa)	E _T =E _Z (Gpa)	G _{LT} =G _{LZ} (Gpa)	G _{TZ} (Gpa)	v _{LT}	v _{TZ}
Cellule unitaire (CU)	chaîne	0.7163	165.58	15.11	6.05	5.17	0.31	0.45
	trame	0.5159	120.05	8.42	3.24	2.85	0.32	0.47
	verticale	0.5840	135.52	10.01	3.91	3.52	0.33	0.49
Cellule globale (CG)	chaîne	0.7959	183.65	21.04	8.52	7.88	0.31	0.45
	trame	0.6045	140.18	10.59	4.15	3.74	0.32	0.47
	verticale	0.4262	99.68	6.89	2.60	2.36	0.33	0.49

Tableau 3: Propriétés élastiques des constituants
Elastic properties of the continuants

	Propriétés mécaniques 3D du tissage orthogonal								
	E ₁ (Gpa)	E ₂ (Gpa)	E ₃ (Gpa)	v ₁₂	v ₁₃	v ₂₃	G ₁₂ (Gpa)	G ₁₃ (Gpa)	G ₂₃ (Gpa)
Modèle analytique									
Cellule unitaire	57.302	58.631	19.808	0.0723	0.2677	0.2692	3.687	3.553	3.451
Cellule globale	57.462	58.944	15.664	0.0676	0.3677	0.3702	4.307	4.114	3.960
Modèle ZYX	56.570	56.746	19.304	0.0743	0.2631	0.2614	3.093	2.753	2.152
Élément finis (37577 trièdres)	59.034	63.313	-	0.1044	0.3334	0.3598	3.950	3.788	3.158
Expérimentales	57.5±1.8	-	15.534±1.09	0.028	0.269	0.268	4.114±0.05	-	-

Tableau 4: Résultats des études analytiques, numériques et expérimentales
Results of analytical, numerical and experimental studies

Il en ressort que les modèles analytiques et EF donnent des résultats sensiblement les mêmes pour les propriétés dans les directions longitudinales (1) et transversales (2) quel que soit le VER choisi. Par contre l'effet du choix du VER se ressent dans la détermination des propriétés dans l'épaisseur. En effet, la cellule globale donne des résultats très proches de l'expérimentation contrairement à l'unité cellulaire qui surestime le module E₃. En Comparant le présent modèle avec le modèle ZXY de Ping et al (2000), on constate une différence notable sur les modules de cisaillements. Le modèle utilisant la cellule globale donne la meilleure satisfaction par comparaison aux résultats expérimentaux. Les propriétés prédites par le modèle de cette étude sont en accord avec l'expérimentation et assez proches des résultats obtenus par EF.

Les résultats analytiques des contraintes à la rupture par application du critère 3D de Tsai-wu ainsi que les résultats expérimentaux sont donnés dans le tableau 5. La modélisation propose des contraintes ultimes, en traction dans le sens longitudinal, égalent indépendamment du choix du VER. On constate également que l'utilisation du critère de rupture 3D donne satisfaction en comparaison avec les résultats expérimentaux. En effet, la cellule unitaire (CU) surestime les contraintes à ruptures puisqu'elle ne tient pas compte de l'ondulation de la mèche verticale. L'état de contrainte dans cette dernière est présenté sur la figure 7. On remarque que la vérification du critère de Tsai est fonction de l'angle d'orientation du renfort dans cette zone. A titre d'exemple, en traction longitudinale, les premiers endommagements apparaissent à 180 MPa.

Type de sollicitation		Déformation et contrainte à la rupture (Mpa)		
		Modèles analytiques		Expérimentale
		CU	CG	
traction selon x	$\sigma_{xx t}$	770	770	780±50
	$\epsilon_{xx t}$	1.47%	1.46%	1.25%±0.07
traction selon y	$\sigma_{yy t}$	770	710	-
	$\epsilon_{yy t}$	1.46%	1.45%	-

Tableau 5: Résultats des déformations et contraintes à rupture.

Results of deformation and strains failure

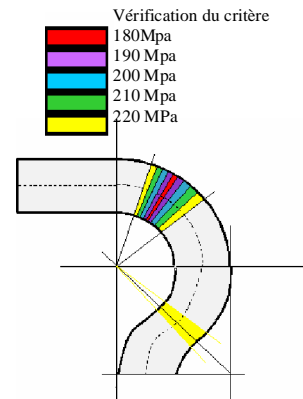


Figure 7: Premières ruptures dans la courbure sous $\sigma_{xx t}$
First failure on vertical yarn under $\sigma_{xx t}$

CONCLUSION

Cette étude a abordé la modélisation du comportement mécanique d'un matériau composite à renfort carbone 3D orthogonal. La détermination des propriétés élastiques 3D homogénéisées s'est faite en utilisant un modèle analytique et numérique. Cette étude révèle l'importance du choix du VER sur certaines propriétés mécaniques, en l'occurrence pour le cas de l'orthogonal 3D les propriétés élastiques et à ruptures hors plan. Les modèles analytique et numérique proposés ont été validés suite à une comparaison aux essais expérimentaux. De plus l'utilisation du critère de Tsai 3D a donné satisfaction pour la prédiction de la rupture en traction dans le sens longitudinale. Des essais dans les trois directions de l'espace devront être menés afin de compléter la validation du modèle.

La méthode numérique qui s'est intéressée au comportement élastique, a tendance à amplifier les caractéristiques homogénéisées, à moins de raffiner davantage le maillage du VER.

REFERENCES

- Aboura Z., Chouchaoui C.S., Benzeggagh M.L. (1993), « Analytical model of woven composite laminate superposition effect of two plies », *Congrès ECCM 6*, EACM, Bordeaux, 1993.
- Berthelot J.M. 1992, « Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures », *Edition Masson (1992)*.
- Chouchaoui C.S., 1995 "Modélisation du comportement des matériaux composites à renforts tissés et à matrices organique", *Thèse de Doctorat de l'Université de Technologie de Compiègne*.
- Duysinx P., 1996 "Optimisation topologique du milieu continu à la structure élastique", *Thèse de Doctorat à l'université de Liège*.

- Khellil K., 1993. "Evaluation expérimentale d'un critère de rupture tensoriel polynomial tridimensionnel pour matériaux composites", *Thèse de Doctorat de l'Université de Technologie de Compiègne*.
- Ping T., Liyong T., Steven G.P., 2000. "Behavior of 3D orthogonal woven CFRP composites. Part II. FEA and analytical modeling approaches", *Composites: Part A*, v. 31, pp. 273-281.
- Sankar B., Marrey R., 1997. "Analytical method for micromechanics of textile composites", *Composites Science and Technology*, v. 57, pp. 703-713.
- Scida D., Aboura Z., Benzeggagh M.L, Bocherens E., 1998 « A micromechanics model for 3D elasticity and failure of woven composite materials » *Composite Science and technology*, 1998 vol.58.