
Estimation du coefficient de transfert de chaleur sur une ailette cylindrique

Vicky Rouss*, Rafic Younes*, Said Abboudi**

* Université du Liban, Faculté du Génie,
Beyrouth – Liban
ryounes@ul.edu.lb

** FEMTO-ST UMR 6174, CREST,
UTBM, Site Sévenans, 90010 Belfort Cedex, France
said.abboudi@utbm.fr

RÉSUMÉ. L'étude proposée a pour objectif d'estimer numériquement les conditions de frontières appliquées sur une ailette de forme cylindrique. Celle-ci est soumise à une condition de flux (ou de température) sur l'une de ses extrémités et une condition d'échange par convection sur le reste de ses frontières. Pour résoudre ce problème inverse de conduction de la chaleur, on minimise la fonctionnelle résiduelle (ou objectif) exprimant l'écart quadratique entre les températures calculées par le problème direct et celles mesurées à l'intérieur de l'ailette. La méthode de programmation séquentielle quadratique avec relaxation est utilisée comme algorithme de minimisation.

Le travail est d'abord validé sur des données simulées numériquement puis expérimentalement sur une ailette cylindrique exposée d'abord au milieu ambiant puis à un écoulement d'air forcé. Les mesures thermiques sont réalisées sur une ligne le long de la surface de l'ailette et sur une autre à l'intérieur de l'ailette le long de son axe.

Mots clés — ailette, Coefficient d'échange, optimisation, flux.

ABSTRACT. The aim of this study is a numerical estimation of boundary conditions applied on a cylindrical fin. This fin receives a heat flow (or a temperature) on one of its extremity and a convective flow on the rest of its limits. To resolve this inverse problem of heat conduction, we minimise the objective function that expresses the quadratic difference between the calculated temperatures by the direct solution and the measured temperatures in the fin. The relaxed SQP method is used to resolve this optimisation problem.

First, the present work is validated on a numerical simulated data. After, it is tested on a cylindrical wing exposed at: (1) a natural convection, (2) a forced convection. The thermal measurements are realised in tow cases: (1) on a line on the surface of the fin and (2) on an internal axis of the fin.

KEYWORDS: fin, exchange coefficient, optimization, heat flow.

1. Introduction

Les méthodes d'estimation des conditions de frontières trouvent leurs applications dans de nombreuses disciplines et plus particulièrement dans les systèmes thermiques. Au cours de ces dernières années, de nombreux travaux ont été consacrés à ce sujet tant sur le plan scientifique qu'industriel. Leur utilisation se justifie par le fait que les grandeurs de surface telles que la température, le flux de chaleur et le coefficient d'échange sont dans de nombreuses applications inaccessibles à la mesure; c'est le cas par exemple, des systèmes moteurs, des turbines à gaz, des chambres de combustion et des échangeurs en général. A travers cette bibliographie, il est possible d'établir une classification de ces travaux selon la nature des méthodes utilisées, la nature des grandeurs à estimer (conditions aux limites, propriétés thermophysiques, paramètres de contact etc.), la géométrie du problème (simple ou complexe), la dimension du problème (1D, 2D ou 3D) transitoire ou non et enfin la nature théorique, numérique et/ou expérimentale de l'étude. Une telle classification n'est pas limitative. Pour plus d'informations sur le sujet, le lecteur est invité à consulter les références [1-15].

Le travail présenté dans cet article concerne l'estimation de la distribution du coefficient d'échange le long d'une ailette chauffée sur l'une de ses extrémités et isolée sur l'autre.

La méthode utilisée est un algorithme de programmation séquentielle basé sur des données de températures obtenues expérimentalement le long de l'axe de l'ailette. Elle permet d'estimer simultanément le coefficient d'échange et le flux imposé. Une liste de travaux sur les ailettes et l'estimation des coefficients d'échange est donnée en référence [16-24].

2. Présentation du système physique

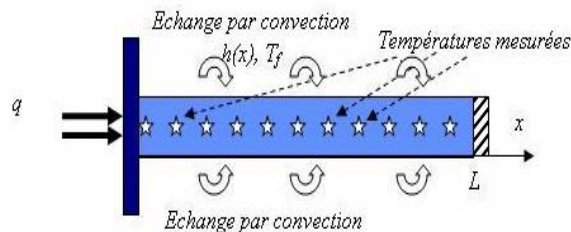


Figure 1. Schéma simplifié de l'ailette étudiée.

Le système d'ailette étudié est de forme cylindrique, définie par ses propriétés physiques et géométriques suivantes :

λ : conductivité thermique, p : périmètre de l'ailette, ($=2\pi R$), S : section de l'ailette, ($=\pi R^2$), q : densité de flux appliquée sur l'extrémité $x=0$, $h(x)$: coefficient d'échange, T_f : température du fluide.

L'ailette est supposée isolée sur l'extrémité $x=L$.

3. Méthodologie

La démarche proposée est validée d'abord sur des simulations théoriques, avant de l'appliquer sur des valeurs expérimentales. La procédure théorique consiste à simuler des valeurs de températures, de les bruite et de les introduire dans l'algorithme de minimisation qui sera décrit plus loin. L'ensemble des étapes de calcul est résumé dans l'organigramme ci-dessous.

3.1. Modèle thermique

Le modèle thermique repose sur l'équation de bilan thermique, en régime permanent, d'une ailette de forme cylindrique soumise à une condition de flux sur l'une de ses extrémités et isolée sur l'autre. L'ailette baigne dans un fluide à la température T_f et échange avec celui-ci par l'intermédiaire d'un coefficient d'échange variable $h(x)$.

Dans ces conditions le modèle thermique s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{h(x) \cdot p}{\lambda \cdot S} (T(x) - T_f) = 0, \quad 0 < x < L \quad (1)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(0)}{\partial x} = q \quad x=0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(L)}{\partial x} = 0, \quad x=L \quad (3)$$

Dans ce modèle, le coefficient d'échange $h(x)$ et la densité de flux q sont inconnus. Des mesures thermiques au sein de l'ailette, plus particulièrement le long de son axe, associées au modèle ci-dessus seront utilisées pour estimer ces grandeurs soit séparément soit simultanément.

3.2. Discrétisation

La discrétisation, par différences finies, du modèle décrit ci-dessus, conduit au système tridiagonal suivant :

$$A_i T_{i-1} + B_i T_i + C_i T_{i+1} = D_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \quad (4)$$

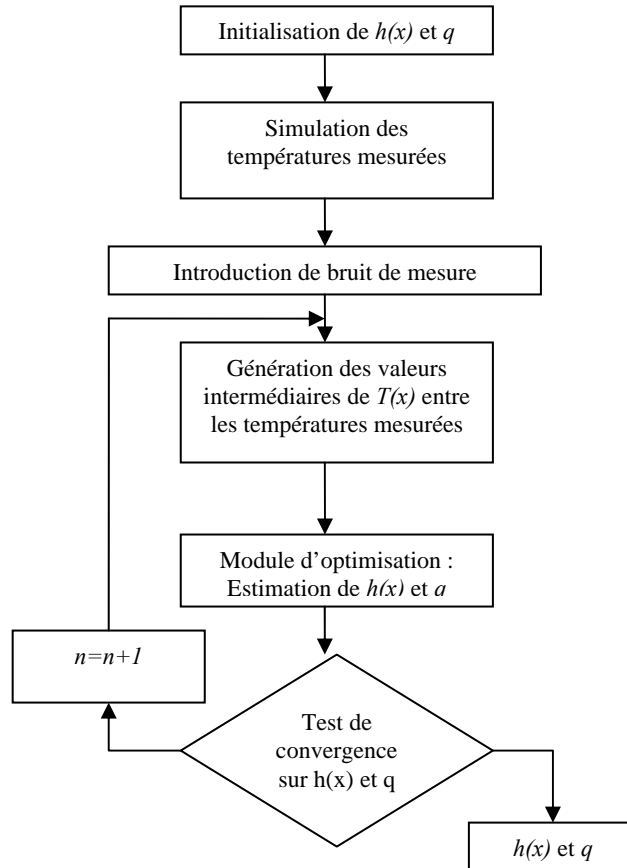
où :

$$A_1 = 0, \quad C_1 = 2, \quad B_1 = -C_1 - H_1, \quad D_1 = H_1 T_f + 2q \Delta x, \quad \text{pour } i = 1,$$

$$A_N = 1, C_N = 0, B_N = -A_N - H_N, D_N = H_N T_f, \text{ pour } i = N$$

$$A_i = 1, C_i = 1, B_i = -A_i - C_i - H_i, D_i = H_i \cdot T_f, \text{ pour } 1 < i < N .$$

avec $H_i = h_i \cdot \frac{P}{\lambda S} \Delta x^2$.



Organigramme d'estimation de $h(x)$ et q

3.2. Optimisation

L'estimation des grandeurs inconnues repose sur la minimisation de la fonction 'objectif' traduisant l'écart quadratique entre les températures estimées et mesurées ou simulées au sein de l'ailette.

Le principe consiste alors à minimiser la fonctionnelle :

$$J(h(x)) = \sum_{i=1}^N (T(x_i; h) - T_{mes_i})^2$$

où T_{mes_i} , $i=1, \dots, N$ représentent les températures mesurées ou simulées et $T(x_i; h)$ les températures calculées aux points de mesure.

Sous les contraintes de type égalité décrites par le système discrétisé (4) et les contraintes de type inégalité traduisant la nature physique des grandeurs à estimer qui doivent être positives.

La méthode de minimisation utilisée est une méthode de programmation séquentielle quadratique avec relaxation.

Selon la technique SQP, on montre la possibilité de transformer la formulation d'un problème d'optimisation classique en une séquence de problèmes d'optimisation quadratique.

Mathématiquement, un problème d'optimisation avec contraintes s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Min } f(X) \\ & X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ & \text{Sous contraintes} \\ & h_i(X) = 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & g_j(X) < 0 \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Où $f(X)$ est la fonction objective, $h(X)$ les contraintes de type égalité et $g(X)$ les contraintes de type inégalité.

La technique SQP consiste à construire une suite de problèmes quadratiques avec contraintes linéaires dont la résolution ne pose aucun problème particulier. Cette suite est définie par :

$$\begin{aligned} \text{Min } & \frac{1}{2} d^T \cdot H_k \cdot d + \nabla f(X_k)^T \cdot d \\ \nabla h_i(X_k) \cdot d^T + h_i(X_k) &= 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \nabla g_j(X_k) \cdot d^T + g_j(X_k) &< 0 \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Dans lequel :

$$H_{k+1} = H_k + \frac{q_k \cdot q_k^T}{q_k^T \cdot s_k} - \frac{H_k^T \cdot s_k^T \cdot s_k \cdot H_k}{s_k^T \cdot H_k \cdot s_k}$$

avec $s_k = X_{k+1} - X_k$
 et $q_k = \nabla f(X_{k+1}) - \nabla f(X_k)$
 et $X_{k+1} = X_k + \alpha_k \cdot d$

d étant la direction de descente et α_k le paramètre de descente.

Le vecteur X est composé du coefficient $h(x_i)$, $i=1, \dots, N$ et du flux q .

4. Validation théorique

La méthode d'optimisation est validée sur deux exemples tests :

1. $q = 11500$; $h(x) = e^{-x} + 9$: cas 1
2. $q = 3680$; $h(x) = e^{-x} + 20$: cas 2

Pour les deux cas proposés, on initialise le calcul avec $N=10$ valeurs simulées (ou mesurées) de la température et on optimise pour chercher une première estimation des grandeurs $h(x)$ et q . On génère ensuite des températures intermédiaires à partir de ces mesures et on optimise à nouveau. On recommence le processus jusqu'à ce qu'on atteigne le critère de convergence ε fixé.

Pour un critère $\varepsilon=0.001$, nous avons générer (ou interpoler) 60 valeurs de températures à partir des $N=10$ mesures initiales.

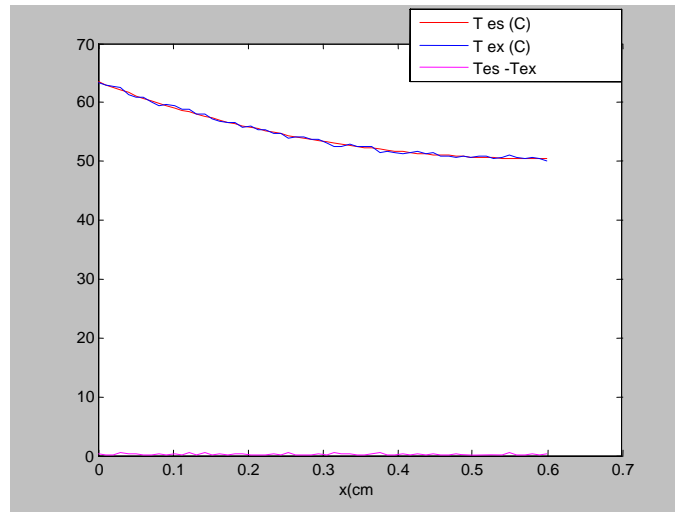


Figure 2. Températures estimées et exactes aux points de mesure.

Les résultats de l'estimation sont présentés, pour les cas tests, respectivement sur les figures 2 et 4 pour les températures aux points de mesures et sur les figures 3 et 4 pour le coefficient d'échange en fonction de x avec des flux estimés $q = 11468 \text{ W}$ pour le cas 1 et $q = 3646,4 \text{ W}$ pour le cas 2.

Un bon accord entre les coefficients d'échange estimés et exacts peut être constaté avec une erreur de l'ordre 2%.

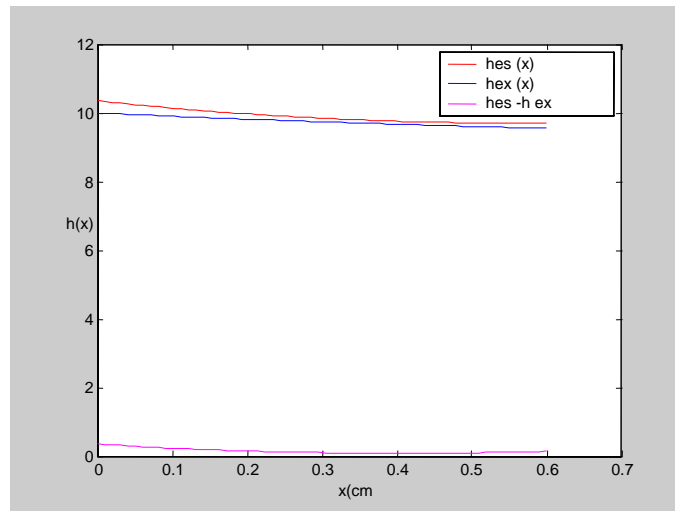


Figure 3. Coefficients d'échanges estimés et exacts en fonction de x
Flux estimé : $q = 11468 \text{ W}$.

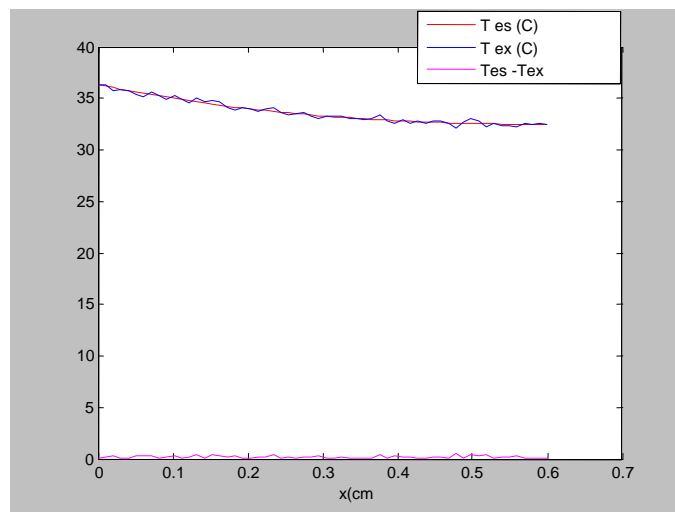


Figure 4. Températures estimées et exactes aux points de mesure.

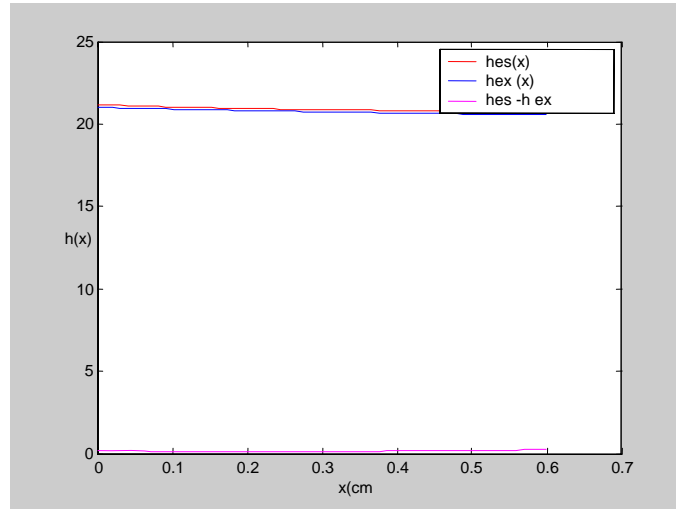


Figure 5. Coefficients d'échanges estimés et exacts en fonction de x

Flux estimé : $q = 3683,8 \text{ W}$.

5. Application expérimentale

5.1. Dispositif expérimental

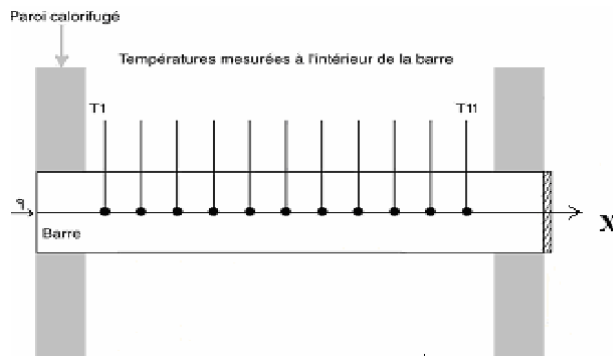


Figure 6. Schéma simplifié du banc d'essai

La barre, en aluminium, est percée à intervalles réguliers (5 cm) le long de son axe permettant d'insérer 11 thermocouples, de type K , mesurant la température le long de son axe, figure 6. Deux parois isolantes ont été placées de part et d'autre de l'ailette afin de l'épargner de l'influence du système de chauffage appliqué sur l'extrémité $x=0$ et d'assurer une isolation correcte sur l'autre extrémité $x=L$. Un

système d'acquisition, relié à un ordinateur, permet de suivre l'évolution des températures jusqu'au régime permanent.

3.2. Estimation à partir des résultats expérimentaux

Deux essais ont été réalisés avec deux flux différents. L'ailette étant toujours exposée au milieu ambiant.

Pour le premier essai ($q=11500 \text{ W}$), nous avons obtenu les mesures suivantes :

x(cm)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
T (C)	64.53	62.1	61.4	59.8	57.1	55.9	54.6	54	52.9	52.6	52.2

Et pour le deuxième ($q=3680 \text{ W}$), nous avons obtenu :

x (cm)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
T (C)	35.5	35,3	35,1	34,7	33,5	33,4	33,3	32,9	32,4	32,2	31,3

Les résultats de l'estimation sont présentés pour les deux cas, respectivement sur les figures 7 et 9 pour les températures aux points de mesure et sur les figures 8 et 10 pour les coefficients d'échange. Les valeurs des flux estimés donnent $q = 11509,4 \text{ W}$ pour le premier essai et $q = 3682,4 \text{ W}$ pour le deuxième essai. Ces dernières valeurs sont en bon accord avec celles prédites par le système de chauffage. Les valeurs estimées des coefficients d'échange montrent une petite variation allant de $8,7$ à $9,7 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{C})$ pour le premier essai et de $21,6$ à $21,85 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{C})$ pour le deuxième essai.

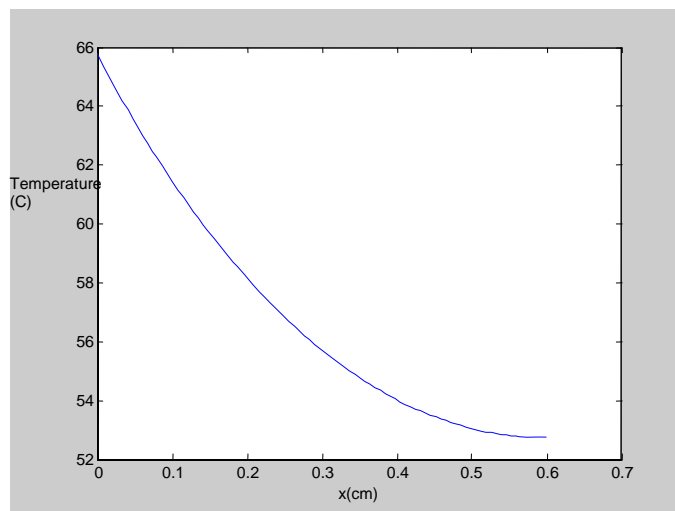


Figure 7. Températures estimées aux points de mesure

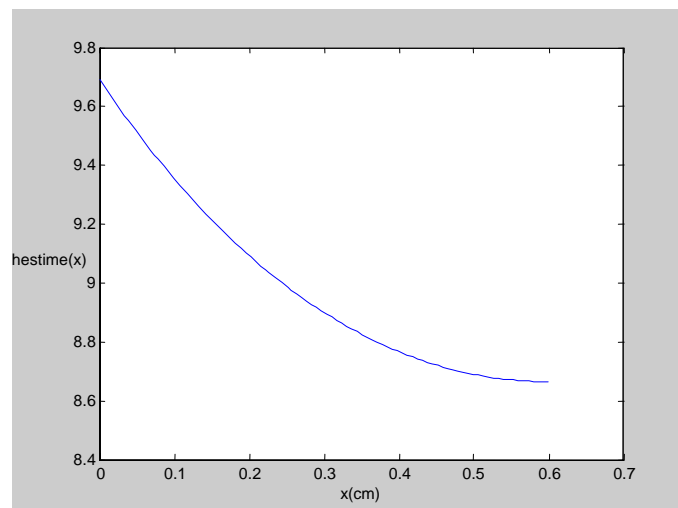


Figure 8. Coefficient d'échange estimé en fonction de x

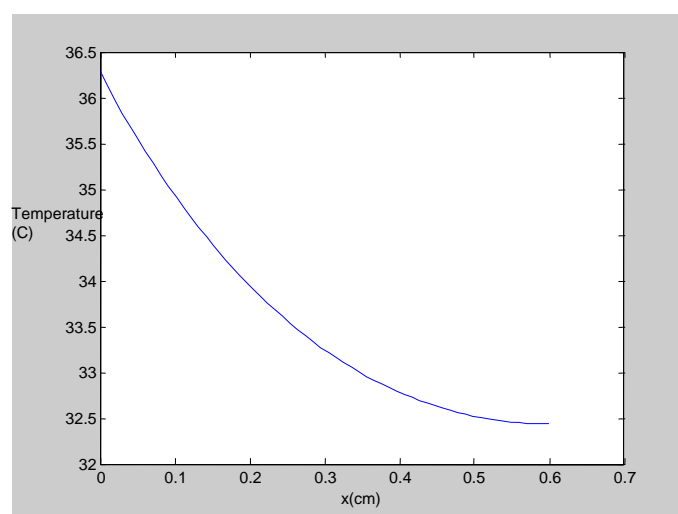


Figure 9. Températures estimées aux points de mesure.

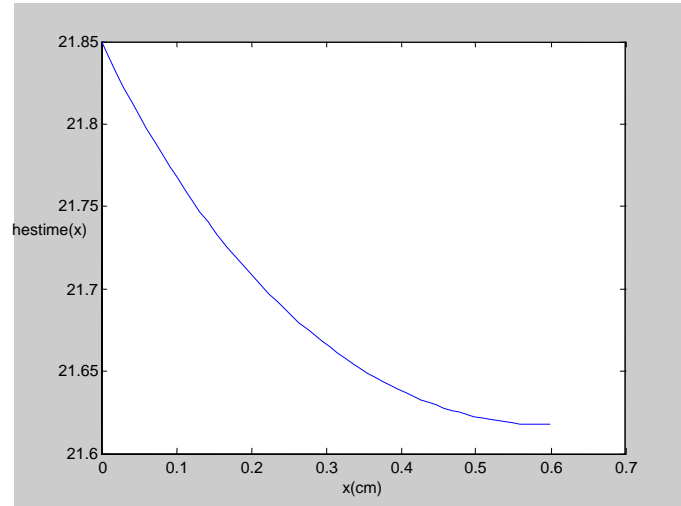


Figure 10. Coefficient d'échange estimé en fonction de x

6. Conclusion

A travers cette étude, nous avons proposé une méthode de programmation séquentielle quadratique avec relaxation pour estimer simultanément le flux de chaleur et le profil du coefficient d'échange le long de l'axe d'une ailette cylindrique. Les mesures additionnelles pour la résolution de ce problème inverse ont été réalisées à l'aide de thermocouples insérés le long de l'axe de l'ailette. Les simulations réalisées avec l'algorithme d'optimisation ont montré la nécessité de générer un certain nombre de températures obtenues par interpolation à partir des mesures de base ($N=60$ dans notre cas) pour une précision donnée. Les résultats obtenus aussi bien sur le plan simulation qu'expérimental sont en bon accord avec les valeurs exactes ou attendues.

12. Bibliographie

- [1] Tikhonov, A., Arsenin V., 1977, *Solution of Ill-posed Problems*, Wiley, New York.
- [2] Alifanov OM. *Inverse heat transfer problem*. Springer-Verlag; 1994. p. 172–3.
- [3] Alifanov, O. M., Artyukhin, E. A., and Romyantsev, S. V., 1995, *Extreme Methods for Solving Ill Posed Problems with Applications to Inverse Heat Transfer Problems*, Begell House, Inc., New York.
- [4] Beck, J. V., Blackwell, B., St. Clair, C. R., 1985, *Inverse Heat Condition : Ill-Posed Problems*, Wiley Intersc., New York.

- [5] Hensel, E., 1991, *Inverse Theory and Applications for Engineers*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [6] Murio, D., 1993, *The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-Posed Problems*, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [7] Beck, J. V., 1993, *Comparison of the Iterative Regularization and Function Specification Algorithms for the Inverse Heat Conduction Problem*, in Zabaras et al., 1993.
- [8] Beck, J. V., Blackwell, B., and Hajisheikh, A., 1996, *Comparison of Some Inverse Heat Conduction Methods Using Experimental Data*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 39, No. 17, pp. 3649-3657.
- [9] Alifanov, O. M., Artyukhin, E. A., and Nenarokomov, A. V., 1987, *Spline-Approximation of the Solution of the Inverse Heat Conduction Problem, Taking Account of the Smoothness of the Desired Function*, High Temperature, Vol. 25, No.5, pp. 520-526.
- [10] Zabaras, N., Woodbury, K., and Raynaud, M., (Eds), 1993, Proceedings of the First International Conference on *Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*, Palm Coast, Florida, USA, June 13-18 1993, ASME, 1993.
- [11] Delaunay, D., Jarny, Y., and Woodbury, K., (Eds), 1996, Proceedings of the 2nd International Conference on *Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*, Le Croisic, France, June 9-14 1996, ASME, 1998.
- [12] K. A. Woodbury (ed), Proceedings of the 3rd International Conference on *Inverse Problems Engineering: Theory and Practice*, June 13-18, 1999, Port Ladlow, Washington, USA, ASME 2000. *4th International Conference on Inverse Problems: identification, design and control Russia, July, 2003*.
- [13] Helcio R. B. Orlande (ed), Proceedings of the 4rd International Conference on *Inverse Problems Engineering: Theory and Practice*, June 13-18, 2002, Rio, Brasil, ASME 2003.
- [14] Abboudi S., Artioukhine, *Two dimensional Computational Estimation of Transient Boundary Conditions for a Flat Specimen*. Proceedings of the 4rd International Conference on Inverse Problems Engineering: Theory and Practice, June 13-18, 2002, Rio, Brasil, ASME 2003.
- [15] Abboudi S., Artioukhine, E., Riad H., *Computational and Experimental Estimation of Boundary Conditions for a Flat Specimen*. Proceedings of the Third International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, Port Ladlow, Seattle, USA, June 13-18 1999, ASME.
- [16] Ma SW, Behbahani AI, Tsuei YG. *Two-dimensional rectangular fin with variable heat transfer coefficient*. Int J. Heat Mass Transfer;34:79–85, 1991.
- [17] Suryanarayana NV. *Transient response of straight fins*. ASME J Heat Transfer 1975;97:417–23.
- [18] Chu HS, Chen CK, Weng CI. *Transient response of circular pins*. ASME J Heat Transfer 1983;105:205–8.
- [19] Wu SS. *Analysis on transient thermal stresses in an annular fin*. J Therm Stresses 1997;20:591–615.
- [20] Su RJ, Hwang JJ. *Analysis of transient heat transfer in a cylindrical pin fin*. AIAA J Thermophys Heat Transfer 1998;12:281–3.

- [21] Su RJ, Hwang JJ. *Transient analysis of two-dimensional cylindrical pin fin with tip convective effects*. Heat Transfer Eng 1999;20:57–63.
- [22] Chang WJ, Chen UC, Chou HM. *Transient analysis of two-dimensional pin fins with non-constant base temperature*. JSME Int J 2002;45:331–7.
- [23] Peng Y. *Heat transfer and friction loss characteristics of pin fin cooling configurations*. ASME J Eng Gas Turbine Power 1984;106:246–51.
- [24] Chang WJ, Weng CI. *Inverse problem of coupled heat and moisture transport for prediction of moisture distributions in an annular cylinder*. Int J Heat Mass Transfer 1999;42:2661–72.