

**UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DE GENIE
DEPARTEMENT MECANIQUE**

**MECANIQUE DES FLUIDES
INCOMPRESSIBLES**

Rafic YOUNES

**Chapitre 1 :
STATIQUES DES FLUIDES**

Sommaire :

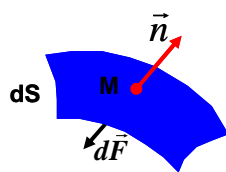
- I – Introduction**
- II – Équation fondamentale de la statique**
- III – Applications**
- IV – Forces hydrostatiques**
- V – Théorème d'Archimède**
- VI – Mesure de la pression**

INTRODUCTION

- **Statique des fluides :**
- **Situations dans lesquelles il n'y a pas de mouvement relatifs entre les particules de fluides :**
 - **Fluide au repos / Accélération nulle**
 - **Il n'y a pas de contraintes dues aux frottements entre les particules de fluides**
 - **Les forces en jeu sont uniquement des forces de surface dues uniquement à la pression.**

INTRODUCTION

- **Pression en un point d'un fluide :**
- **la pression désigne la force par unité de surface qui s'exerce perpendiculairement à un élément de surface dS .**



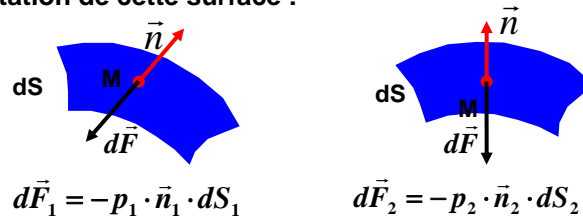
$$d\vec{F} = -p \cdot \vec{n} \cdot dS$$

dF est la force exercée sur l'élément de surface dS .
 p est la pression régnant au point M .

- **La force de pression agit toujours vers l'intérieur du volume délimité par l'élément de surface.**

INTRODUCTION

- La pression est toujours indépendante de la surface et de l'orientation de cette surface :

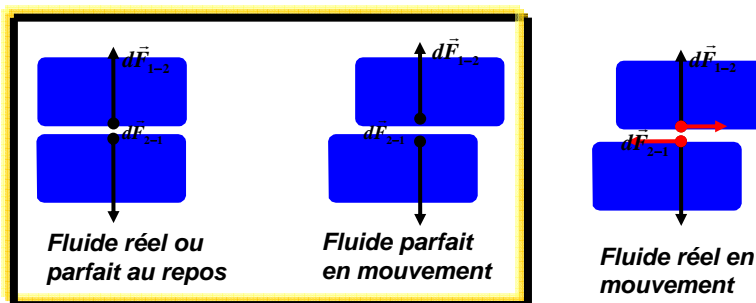


$$d\vec{F}_1 \neq d\vec{F}_2 \quad \text{Mais } p_1 = p_2 = p(M)$$

- La pression s'exprime en pascal : $\text{Pa} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- On trouve aussi : $1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ & $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

INTRODUCTION

Fluide parfait et fluide réel :



Les forces de surface sont normales

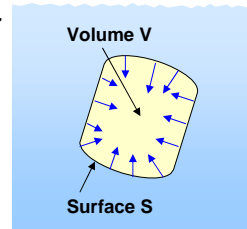
ÉQUATION FONDAMENTALE

Soit un volume V d'un fluide au repos, délimité par une surface S dans un repère Galiléen R .

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_V = \vec{0}$$

avec

$$\vec{F}_S = -\oint_S p \cdot \vec{n} \cdot dS \quad \& \quad \vec{F}_V = \int_V \rho \cdot \vec{g} \cdot d\tau$$



La formule du gradient permet de passer d'une intégrale de surface à une intégrale de volume

$$\oint_S f \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_V \vec{grad}(f) \cdot d\tau$$

D'où

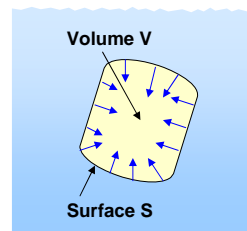
$$-\iiint_V \vec{\nabla}(p) \cdot d\tau + \iiint_V \rho \cdot \vec{g} \cdot d\tau = \vec{0} \implies -\nabla(p) + \rho \cdot \vec{g} = \vec{0}$$

ÉQUATION FONDAMENTALE

Généralisation

Soit f_S le champ des forces surfaciques et f_V le champ des forces volumiques

$$\vec{F}_S = -\oint_S f_S \cdot \vec{n} \cdot dS \quad \& \quad \vec{F}_V = \int_V \vec{f}_V \cdot d\tau$$



$$\sum \vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_V = \vec{0}$$

D'où

$$-\iiint_V \vec{\nabla}(f_S) \cdot d\tau + \iiint_V \vec{f}_V \cdot d\tau = \vec{0} \implies -\nabla(f_S) + \vec{f}_V = \vec{0}$$

APPLICATION 1

1 * Fluide incompressible $\implies \rho = C^{te}$ en tout point du fluide

2 * $g = C^{te} \implies \rho \cdot \vec{g} = -\rho \cdot g \cdot \vec{k} = -\vec{\nabla}(\rho \cdot g \cdot z)$

L'équation fondamentale de l'hydrostatique donne :

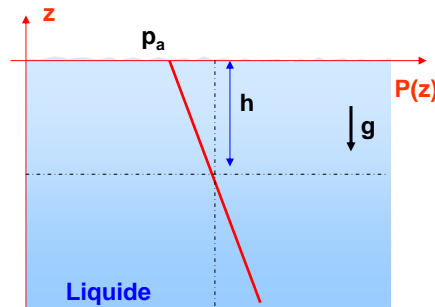
$$-\vec{\nabla}(p) - \vec{\nabla}(\rho \cdot g \cdot z) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$p(z) + \rho \cdot g \cdot z = C^{te}$$

Si p_0 est la pression à l'altitude z_0 :

$$p(z) + \rho \cdot g \cdot z = p_0 + \rho \cdot g \cdot z_0$$



09/02/2005

M.D.F. - Rafic Younés

9

APPLICATION 2

Fluide compressible isotherme $\implies p = \rho \cdot r \cdot T$

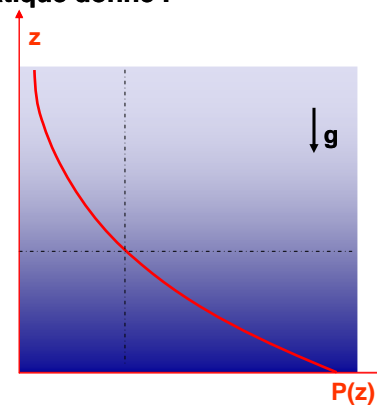
L'équation fondamentale de l'hydrostatique donne :

$$-\vec{\nabla}(p) - \vec{\nabla}(\rho \cdot g \cdot z) = 0$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho \cdot g \implies \frac{dp}{dz} = -\frac{p}{r \cdot T} \cdot g$$

$$\implies \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g}{r \cdot T} \cdot \int_{z_0}^z dz \quad \Downarrow$$

$$p(z) = p_0 \cdot \exp\left[-\frac{g}{r \cdot T_0} \cdot (z - z_0)\right]$$



09/02/2005

M.D.F. - Rafic Younés

10

APPLICATION 3

Fluide compressible

$$\begin{cases} p = \rho \cdot r \cdot T \\ p / \rho^\gamma = p_0 / \rho_0^\gamma \end{cases}$$

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \cdot \frac{d\rho}{\rho}$$

L'équation fondamentale de l'hydrostatique donne :

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz$$

La loi de Laplace devient :

$$-\frac{\rho \cdot g \cdot dz}{p_0} = -\gamma \cdot \frac{\rho^\gamma \cdot d\rho}{\rho_0^\gamma \cdot \rho}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} p(z) &= p_0 \cdot \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot (z - z_0) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \rho(z) &= \rho_0 \cdot \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot (z - z_0) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ T(z) &= T_0 \cdot \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot (z - z_0) \right] \end{aligned}$$

09/02/2005

M.D.F. - Rafic Younés

11

APPLICATIONS 2 et 3

Atmosphère standard :

$$T_0 = 288; p_0 = 101325; \rho_0 = 1.226;$$

$0 < z < 11$ km ($\gamma = 1.255$)

$$T = 288 - .0065 \cdot z$$

$$\rho = 101325 \cdot [1 - 2.257 \cdot 10^{-5} \cdot z]^{4.9216}$$

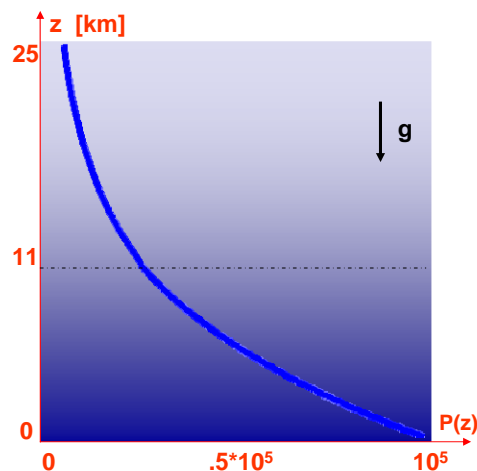
$$p = 1.226 \cdot [1 - 2.257 \cdot 10^{-5} \cdot z]^{3.9216}$$

11 km $< z < 25$ km

$$T = 216.5 \text{ °K}$$

$$\rho = 101325 \cdot e^{-0.00012573 \cdot (z-11000)}$$

$$p = 1.226 \cdot e^{-0.00012573 \cdot (z-11000)}$$



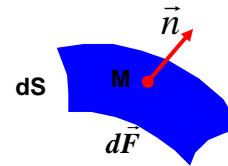
09/02/2005

M.D.F. - Rafic Younés

12

FORCES HYDROSTATIQUES

On sait $d\vec{F} = -p \cdot \vec{n} \cdot dS$ que est la force de pression élémentaire s'exerçant sur la surface élémentaire dS .

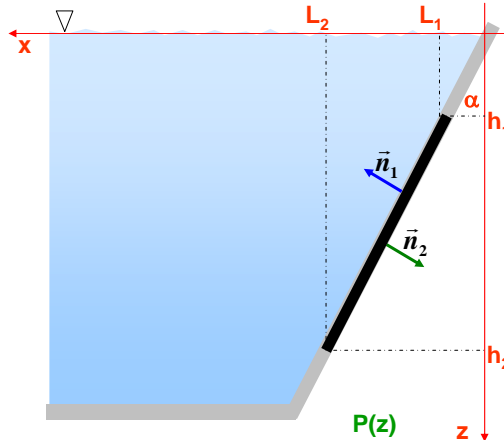


Pour connaître la force totale s'exerçant sur une surface S , il suffit d'intégrer $d\vec{F}$ sur cette surface S :

$$d\vec{F} = -\int_S p \cdot \vec{n} \cdot dS$$

FORCES HYDROSTATIQUES

Cas particulier d'une paroi plane inclinée:



$$\vec{F}_1 = -\int_S p \cdot \vec{n}_1 \cdot dS$$

$$\begin{cases} p = p_0 + \rho \cdot g \cdot z \\ n_1 = \cos(\alpha) \cdot \vec{i} - \sin(\alpha) \cdot \vec{k} \end{cases}$$

La pression atmosphérique s'applique de part et d'autre de la paroi

$$\begin{cases} \vec{F}_2 = -\int_S p_0 \cdot \vec{n}_2 \cdot dS \\ \vec{n}_2 = -\vec{n}_1 \end{cases}$$

Finalement :

$$\begin{cases} \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ \vec{F} = -\int_S \rho \cdot g \cdot z \cdot \vec{n}_1 \cdot dS \end{cases}$$

FORCES HYDROSTATIQUES

$$\vec{F} = -\int_S \rho \cdot g \cdot z \cdot \cos(\alpha) \cdot \vec{i} \cdot dS + \int_S \rho \cdot g \cdot z \cdot \sin(\alpha) \cdot \vec{k} \cdot dS$$

$$\sin(\alpha) \cdot dS = 1 \cdot dx \quad \cos(\alpha) \cdot dS = 1 \cdot dz \quad z = x / \tan(\alpha)$$

$$\vec{F} = -\rho \cdot g \cdot \vec{i} \cdot \int_{h_1}^{h_2} z \cdot dz + \rho \cdot g \cdot \tan(\alpha) \cdot \vec{k} \cdot \int_{h_1}^{h_2} z \cdot dz$$

$$\vec{F} = \rho \cdot g \cdot \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} \vec{i} + \rho \cdot g \cdot (h_2 + h_1) \cdot \frac{L_2 - L_1}{2} \vec{k}$$

09/02/2005

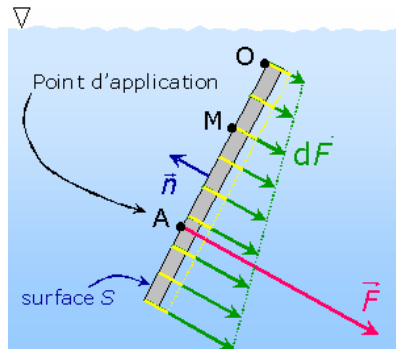
M.D.F. - Rafic Younès

15

FORCES HYDROSTATIQUES

Détermination du centre de poussée d'une force hydrostatique :

Si \vec{F} est la force hydrostatique s'exerçant sur une surface S, alors on peut avoir besoin de connaître le point d'application A de cette force.



Il faut alors calculer le moment de la force par rapport à un point O quelconque, puis identifier ce moment à la résultante des moments élémentaires par rapport à ce même point O :

$$\vec{OA} \wedge \vec{F} = \int_S \vec{OM} \wedge d\vec{F}$$

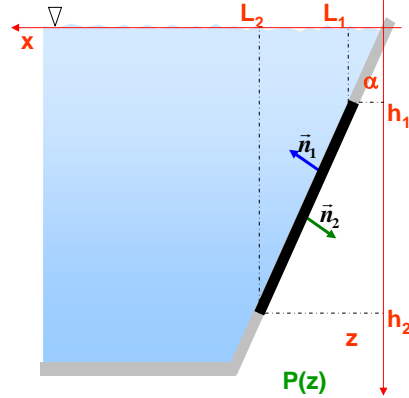
09/02/2005

M.D.F. - Rafic Younès

16

FORCES HYDROSTATIQUES

Cas particulier d'une paroi plane inclinée:



$$\begin{cases} \vec{F}_x = \rho \cdot g \cdot \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} \vec{i} \\ \vec{F}_z = \rho \cdot g \cdot (h_2 + h_1) \cdot \frac{L_2 - L_1}{2} \vec{k} \end{cases}$$

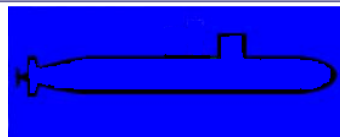
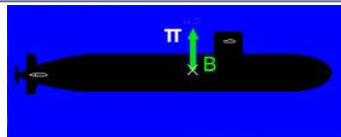
$$\begin{cases} d\vec{F}_x = -\rho \cdot g \cdot z \cdot dz \cdot \vec{i} \\ d\vec{F}_z = \rho \cdot g \cdot \tan(\alpha) \cdot z \cdot dz \cdot \vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{OA} = x_A \cdot \vec{i} + z_A \cdot \vec{k} \\ \vec{OM} = x \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{k} \end{cases}$$

Finalement :

$$x_A = \frac{L_2 - L_1}{2} \quad z_A = \frac{2}{3} \cdot (h_2 - h_1)$$

THEOREME D'ARCHIMEDE



On sait que la force exercée par le fluide sur le solide immergé s'exprime comme :

$$\vec{\Pi} = \vec{F}_s = -\oint_S p \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Or :

$$-\oint_S p \cdot \vec{n} \cdot dS + \int_V \rho \cdot \vec{g} \cdot d\tau = 0 \implies \vec{\Pi} = -\int_V \rho \cdot \vec{g} \cdot d\tau$$

En supposant g et rho constante sur tout le volume :

$$\vec{\Pi} = -\int_V \rho \cdot \vec{g} \cdot d\tau = -\rho \cdot \vec{g} \cdot V \implies \text{Force opposée au poids du fluide déplacé}$$

Poussée d'Archimède

THEOREME D'ARCHIMEDE

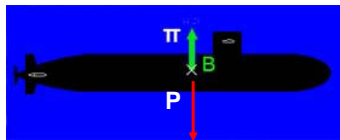


$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{Liquide}} \cdot \vec{g} \cdot V_{\text{immergé}}$$

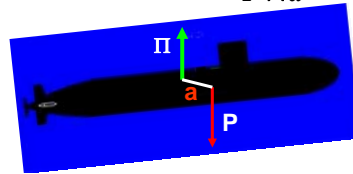
$$\vec{P} = \rho_{\text{glace}} \cdot \vec{g} \cdot V_{\text{totale}} \implies \frac{V_{\text{immergé}}}{V_{\text{totale}}} = \frac{\rho_{\text{glace}}}{\rho_{\text{Liquide}}}$$

$$\vec{\Pi} + \vec{P} = \mathbf{0}$$

L'équilibre est stable si le centre de gravité G est au dessous du centre de poussée P



Couple de rappel : $\vec{P} \wedge \vec{a}$

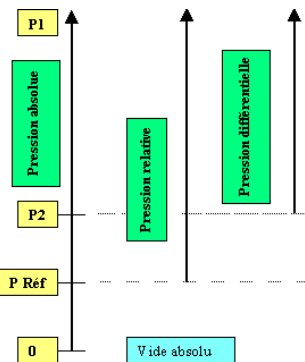


09/02/2005

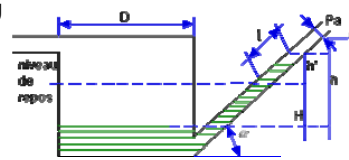
M.D.F. - Rafic Younés

19

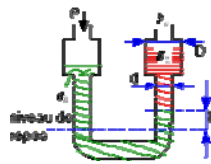
MESURE DE LA PRESSION



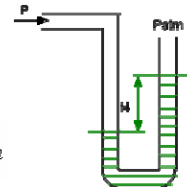
Les tubes en U



$$P = l E g \left(\sin \alpha + \frac{d^2}{D^2} \right)$$



$$P = [E_1 - E_2 + \frac{d^2}{D^2} (E_1 + E_2)] g h$$



$$P = \rho g h$$

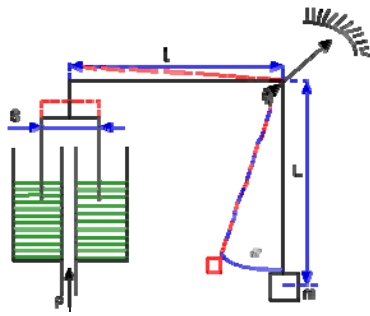
09/02/2005

M.D.F. - Rafic Younés

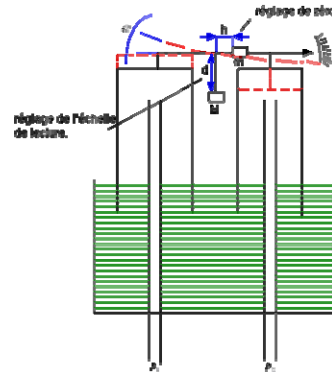
20

MESURE DE LA PRESSION

Les manomètres à cloches



$$P = \frac{m g L}{s l} \sin \alpha$$



$$P_1 - P_2 = \frac{g}{Sl} (M \operatorname{tg} \alpha \cdot d + hm)$$

09/02/2005

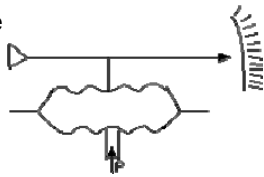
M.D.F. - Rafic Younés

21

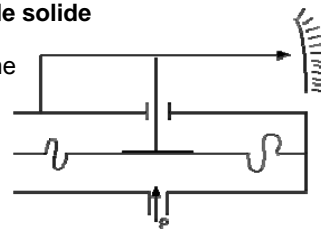
MESURE DE LA PRESSION

Les manomètres à déformation de solide

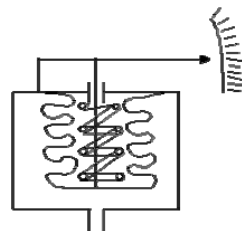
à capsule



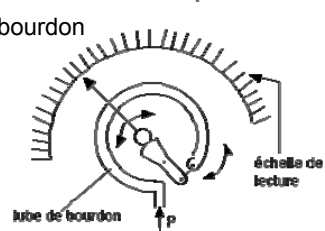
à membrane



à soufflet



Tube de bourdon



09/02/2005

M.D.F. - Rafic Younés

22