

**UNIVERSITE LIBANAISE  
FACULTE DE GENIE  
DEPARTEMENT MECANIQUE**

**MECANIQUE DES FLUIDES  
INCOMPRESSIBLES**

**Rafic YOUNES**

**Chapitre 6 :  
THEORIE DE LA SIMILITUDE**

**Sommaire :**

- I – Équations adimensionnelles
- II – Les différentes étapes de l'analyse dimensionnelle
- III – Théorème de Vashy-Buckingham
- IV – Groupements sans dimensions
- V – Applications

## EQUATIONS ADIMENTIONNELLES

- Équation du mouvement :

$$\rho \cdot \left[ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{U}) \right] = \rho \cdot g - \text{grad}(p) + \mu \cdot \Delta \vec{U}$$

- Grandeurs caractéristiques :

■ Longueur :  $L_0$       Pression :  $P_0$       Vitesse :  $U_0$   
 Accélération :  $g_0$       Temps :  $t_0$

- Variables réduites :

$$\vec{U}^* = \frac{\vec{U}}{U_0} \quad \overrightarrow{\text{grad}}^* = L_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \quad p^* = \frac{p}{p_0} \quad g^* = \frac{g}{g_0} \quad t^* = \frac{t}{t_0}$$

## EQUATIONS ADIMENTIONNELLES

- Équation du mouvement en variables réduites :

$$\frac{L_0}{U_0 t_0} \frac{\partial \vec{U}^*}{\partial t^*} + \vec{U}^* \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{U}^* = \frac{g_0 L_0}{U_0^2} \vec{g}^* - \frac{p_0}{\rho U_0^2} \overrightarrow{\text{grad}} p^* + \frac{\mu}{\rho U_0 L_0} \Delta \vec{U}^*$$

- Équation adimensionnelle :

$$\frac{\rho U_0}{t_0} \frac{\partial \vec{U}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho U_0^2}{L_0} \vec{U}^* \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{U}^* = \rho g_0 \vec{g}^* - \frac{p_0}{L_0} \overrightarrow{\text{grad}} p^* + \frac{\mu U_0}{L_0^2} \Delta \vec{U}^*$$

$$St \frac{\partial \vec{U}^*}{\partial t^*} + \vec{U}^* \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{U}^* = \frac{1}{Fr} \vec{g}^* - Eu \overrightarrow{\text{grad}} p^* + \frac{1}{Re} \Delta \vec{U}^*$$

## EQUATIONS ADIMENSIONNELLES

Nombre de <b>Strouhal</b> : Accélérations instationnaire / convective	$St = \frac{L_0}{U_0 t_0}$
Nombre de <b>Froude</b> : Forces inertie / pesanteur	$Fr = \frac{U_0^2}{g_0 L_0}$
Nombre d' <b>Euler</b> : (Forces pression / inertie	$Eu = \frac{P_0}{\rho_0 U_0^2}$
Nombre de <b>Reynolds</b> : Force inertie / viscosité	$Re = \frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu}$

## ANALYSE DIMENSIONNEL

- **Faire l'inventaire des forces en jeux**
- **Établir une liste des grandeurs dites "actives"**
- **Choisir les grandeurs fondamentales**
  - dont l'intervention dans le phénomène étudié est certaine,
  - qu'il est difficile de faire varier expérimentalement,
  - qu'il est facile de maintenir constantes.
- **Former les groupements sans dimensions ou groupement  $\pi$** 
  - (avec les grandeurs fondamentales au dénominateur)
- **Formuler la loi reliant les différents groupements  $\pi$**

## THEOREME II

- n grandeurs physiques  $G_i$  :

$$F(G_1, G_2, \dots, G_i, \dots, G_n) = 0$$

- p le nombre de grandeurs fondamentales indépendantes :

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i, \dots, \pi_{n-p}) = 0$$



$$\pi_p = \varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i, \dots, \pi_{n-p-1})$$

25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

7

## GROUPEMENTS SANS DIMENSIONS

- Grandeur mécanique G dans le système (M,L,T) :

$$[G] = M^\alpha L^\beta T^\gamma$$

- Force :
- Pression :

$$[F] = [m\gamma] = MLT^{-2}$$

$$[p] = \left[ \frac{F}{S} \right] = ML^{-1}T^{-2}$$

- Grandeurs primaires



Convention :

- Masse : **M**
- Longueur : **L**
- Temps : **T**

25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

8

## GROUPEMENTS SANS DIMENSIONS

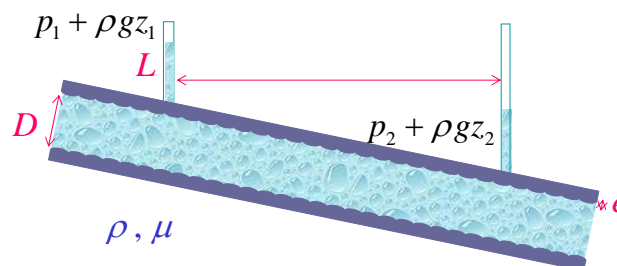
**Exemple :**  $\rightarrow G = F(F_1, F_2, F_3) \rightarrow [G] = F_1^x F_2^y F_3^z$

$$\begin{cases} [G] = F_1^x F_2^y F_3^z \\ [G] = M^\alpha L^\beta T^\gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} [F_1] = M^{a_{11}} L^{a_{12}} T^{a_{13}} \\ [F_2] = M^{a_{21}} L^{a_{22}} T^{a_{23}} \\ [F_3] = M^{a_{31}} L^{a_{32}} T^{a_{33}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z = \alpha \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z = \beta \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z = \gamma \end{cases}$$

## APPLICATION 1: Pertes de charges

Pertes de charge dans une conduite



Grandeurs actives :

Géométriques :

$D, e, L$

Physiques :

$\rho, \mu$

Cinématiques et dynamiques:  $U, \Delta \hat{p}$

~~$g$  et  $z$~~

## APPLICATION 1: Pertes de charges

On suppose que :  $\Delta \hat{p} = k \cdot D^x \cdot L^y \cdot U^z \cdot \rho^\alpha \cdot \mu^\beta \cdot \varepsilon^\gamma$

Nous avons 6 paramètres et 3 unités fondamentales ( $kg, m, s$ );  
l'analyse dimensionnelle donne :

$$kg^1 m^{-2} s^{-2} = m^x m^y m^z s^{-z} kg^\alpha m^{-3\alpha} kg^\beta m^{-\beta} s^{-\beta} m^\gamma$$

$$kg^1 m^{-2} s^{-2} = kg^{\alpha+\beta} m^{x+y+z-3\alpha-\beta+\gamma} s^{-z-\beta}$$

$$kg^1 m^{-2} s^{-2} = kg^{\alpha+\beta} m^{x+y+z-3\alpha-\beta+\gamma} s^{-z-\beta}$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ -2 = x + y + z - 3\alpha - \beta + \gamma \\ -2 = -z - \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ z = 2 - \beta \\ x = -\beta - y - \gamma - 1 \end{cases}$$

25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

11

## APPLICATION 1: Pertes de charges

$$\Delta \hat{p} = k \cdot D^{-\beta-y-\gamma-1} \cdot L^y \cdot U^{2-\beta} \cdot \rho^{1-\beta} \cdot \mu^\beta \cdot \varepsilon^\gamma$$

$$\frac{\Delta p}{L} = k \cdot D^{-1} \cdot U^2 \cdot \rho^1 \cdot \left( \frac{\mu}{\rho \cdot U \cdot D} \right)^\beta \cdot \left( \frac{L}{D} \right)^y \cdot \left( \frac{\varepsilon}{D} \right)^\gamma$$

$$\Rightarrow \Delta p = k \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \frac{L}{D} \cdot f \left( \frac{\mu}{\rho \cdot U \cdot D}, \frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D} \right)$$

$$\Delta p = \rho \cdot \frac{U^2}{2} \cdot \frac{L}{D} \cdot f \left( \text{Re}, \frac{\varepsilon}{D} \right)$$



**Fin de l'analyse dimensionnelle.  
Seule l'expérience peut permettre de formuler la loi.**

25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

12

## APPLICATION 1: Pertes de charges linéaires



- L'expérience de Nikuradsé a pour but de déterminer l'influence de la rugosité des parois sur le coefficient de perte de charge linéaire.
- Les parois d'une conduite sont rendues artificiellement rugueuses en y collant des grains de sable calibrés. En changeant la taille des grains on change la rugosité.
- On trace  $\log \lambda$  en fonction de  $\log Re$ . On appelle  $\varepsilon$  la taille moyenne des grains collés et  $D$  le diamètre de la conduite.  $\varepsilon/D$  est la rugosité relative.
- On remarque:

1- la rugosité n'a pas d'influence en régime laminaire et le nombre de Reynolds critique  $Rc$  est indépendant de la rugosité.

2- quand  $R > Rc$  la perte de charge dépend fortement de  $\varepsilon/D$  ou du nombre de Reynolds.

3- quand  $R \gg Rc$  la perte de charge ne dépend pas du nombre de Reynolds, elle ne dépend que de  $\varepsilon/D$ .

25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

13

## APPLICATION 1: Pertes de charges linéaires



- Le coefficient de perte de charge est donné par :

□ Régime laminaire  $R < 2000$  :

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

- Régime turbulent lisse  $R > 2000$  et  $\varepsilon/D < 1/30$ :

$$\lambda = 0.316 \cdot Re^{-0.25} \qquad \lambda = 0.79 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}}$$

- Régime turbulent  $Re \gg 2000$  :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log \left[ \frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.71 D} \right]$$

25/12/2006

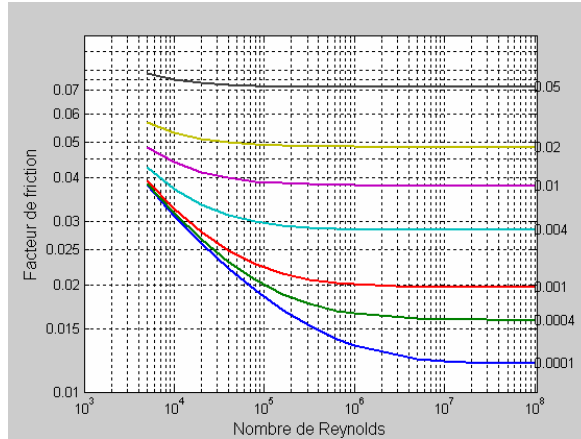
M.D.F. - Rafic Younés

14

# APPLICATION 1: Pertes de charges linéaires



- Diagramme de Moody:
- En pratique, on utilise des abaques appelées diagramme de Moody qui représentent le coefficient de perte de charge en fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité relative.



25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

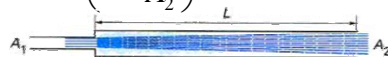
15

# APPLICATION 1: Pertes de charges singulières



Élargissement brusque :  $\Delta p = \zeta \cdot \rho \cdot \frac{U^2}{2}$

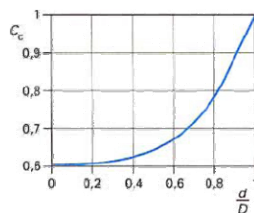
$$\zeta = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$



Diaphragme mince dans un tube :

A schematic diagram showing a thin diaphragm of thickness  $d$  partially blocking a pipe of diameter  $D$ . The flow velocity is  $v$ .

$$\zeta = \left(\frac{D^2}{C_c \cdot d^2} - 1\right)^2$$



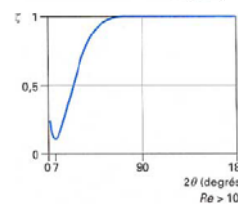
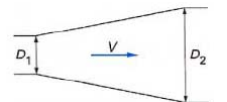
25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

Rétrécissement brusque :

$$\zeta = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \left(\frac{A_1}{A_2} - 1\right)^2$$

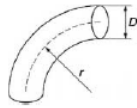
Divergent Conique :



16

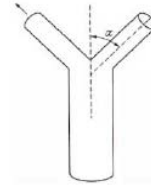
## APPLICATION 1: Pertes de charges singulières

$$\Delta p = \zeta \cdot \rho \cdot \frac{U^2}{2}$$



Coude arrondi :

$r/D$	0,5	0,75	1	1,5	2	3	4
$\zeta$	1,2	0,60	0,40	0,32	0,27	0,22	0,20

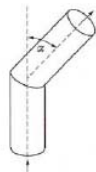


Bifurcation à angles vifs :

$\alpha$ (°)	15	30	45	60	90
$\zeta$	0,1	0,3	0,7	1,0	1,4

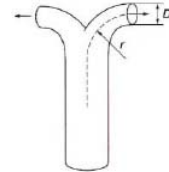
$\alpha$ (°)	15	30	45	60	90
$\zeta$	0,1	0,2	0,5	0,7	1,3

Coude à angle vif :



$r/D$	0,5	0,75	1	1,5	2,0
$\zeta$	1,2	0,6	0,4	0,25	0,2

Bifurcation arrondi :

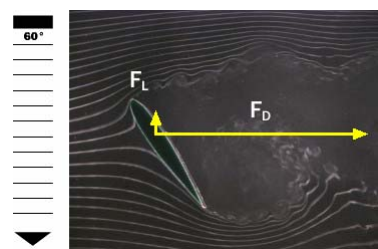
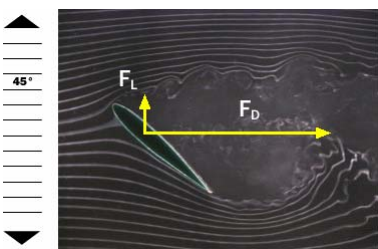
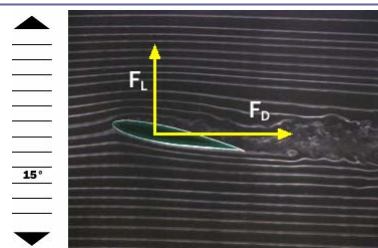
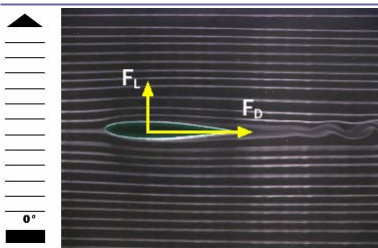


25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

17

## APPLICATION 2 : Résistance des corps dans les fluides



25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

18

## APPLICATION 2 : Résistance des corps dans les fluides

On suppose que :  $F_D = k \cdot D^x \cdot A^y \cdot U^z \cdot \rho^\alpha \cdot \mu^\beta$

Nous avons 5 paramètres et 3 unités fondamentales ( $kg, m, s$ );  
l'analyse dimensionnelle donne :

$$kg^1 m^1 s^{-2} = m^x m^{2y} m^z s^{-z} kg^\alpha m^{-3\alpha} kg^\beta m^{-\beta} s^{-\beta}$$

$$kg^1 m^1 s^{-2} = kg^{\alpha+\beta} m^{x+2y+z-3\alpha-\beta} s^{-z-\beta}$$

$$kg^1 m^1 s^{-2} = kg^{\alpha+\beta} m^{x+2y+z-3\alpha-\beta} s^{-z-\beta}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \alpha + \beta \\ 1 = x + 2y + z - 3\alpha - \beta \\ -2 = -z - \beta \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 - \beta \\ z = 2 - \beta \\ x = -\beta - 2y + 2 \end{array} \right.$$

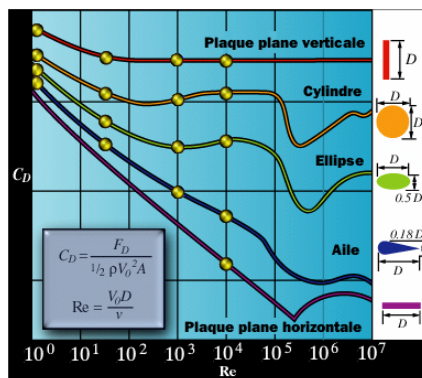
25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

19

## APPLICATION 2 : Résistance des corps dans les fluides

$$F_D = k \cdot D^{-\beta-2y+2} \cdot A^y \cdot U^{2-\beta} \cdot \rho^{1-\beta} \cdot \mu^\beta$$



$$F_D = k \cdot \rho \cdot U^2 \cdot D^{-2y+2} \cdot A^y \cdot \left( \frac{\mu}{\rho U D} \right)^\beta$$

Pour :  $-2y + 2 = 0 \rightarrow y = 1$

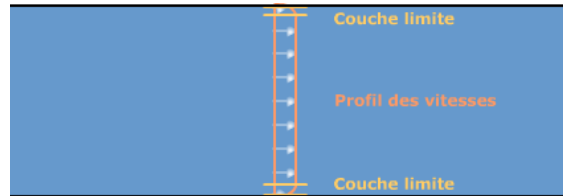
$$F_D = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_D \left( \frac{\mu}{\rho U D} \right) \cdot A \cdot U^2$$

25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

20

## APPLICATION 3 : Couche limite



Soit l'écoulement d'un fluide entre deux plaques planes parallèles séparées par une épaisseur importante. L'expérience montre que loin des plaques, les forces de viscosité n'interviennent pas et l'écoulement est assimilable à celui d'un fluide parfait.

Au voisinage des plaques, la vitesse croît de zéro à  $V$ . Dans cette zone de faible épaisseur, appelée couche limite, les forces de viscosité sont prépondérantes.

On appelle épaisseur  $\delta$  de la couche limite la distance entre la paroi et les points où la vitesse des particules est égale à 99% de la vitesse uniforme.

25/12/2006

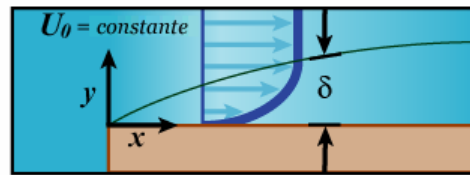
M.D.F. - Rafic Younés

21

## APPLICATION 3 : Couche limite

Grandeurs actives :

Géométriques :  $x$   
 Physiques :  $\rho, \mu$   
 Cinématiques et dynamiques :  $U, \delta(x)$



Écoulement de Blasius au-dessus d'une plaque

On suppose que :

$$\delta(x) = k \cdot x^y \cdot U^z \cdot \rho^\alpha \cdot \mu^\beta$$

$$m^1 = m^y m^z s^{-z} \text{ kg}^\alpha m^{-3\alpha} \text{ kg}^\beta m^{-\beta} s^{-\beta}$$

$$m^1 = m^{y+z-3\alpha-\beta} s^{-z-\beta}$$

$$\text{kg}^0 m^1 s^0 = \text{kg}^{\alpha+\beta} m^{y+z-3\alpha-\beta} s^{-z-\beta}$$

$$0 = \alpha + \beta \quad \rightarrow \quad \alpha = -\beta$$

$$0 = -z - \beta \quad \rightarrow \quad z = -\beta$$

$$1 = y + z - 3\alpha - \beta \quad \rightarrow \quad y = 1 - \beta$$

$$\delta(x) = k \cdot x^{1-\beta} \cdot U^{-\beta} \cdot \rho^{-\beta} \cdot \mu^\beta$$

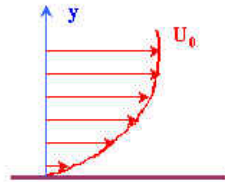
$$\delta(x) = k \cdot x \cdot \left( \frac{\mu}{\rho \cdot U \cdot x} \right)^\beta = \frac{x}{f(\text{Re})}$$

25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

22

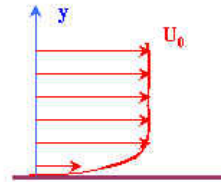
## APPLICATION 3 : Couche limite



Pari

Régime laminaire

$$\delta(x) = \frac{4,64 \cdot x}{\sqrt{Re}}$$



Pari

Régime turbulent

$$\delta(x) = \frac{0,376 \cdot x}{Re^{0,2}}$$