

UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DE GENIE
DEPARTEMENT MECANIQUE

MECANIQUE DES FLUIDES
INCOMPRESSIBLES

Rafic YOUNES

Chapitre 3 :
DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAIT

Sommaire :



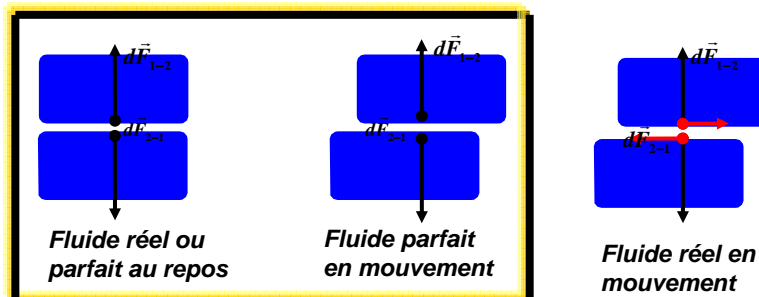
- I – Introduction
- II – Équation fondamentale de la dynamique
- III – Application
- IV – Théorème de Bernoulli
- V – Applications
- VI – Théorème d'Euler
- VII – Application

INTRODUCTION

- **Dynamique des fluides :**
- ***Il s'agit de tenir compte de toutes les forces agissant sur les particules fluides en cours de mouvement.***
- ***Une description quantitative du mouvement peut être déduite d'équations fondamentales.***
- ***Les forces en jeu sont uniquement des forces de surface dues uniquement à la pression et des forces de volume dues à la gravitation.***

INTRODUCTION

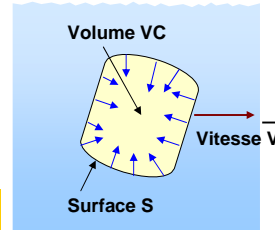
Fluide parfait et fluide réel :



Les forces de surface sont normales

ÉQUATION FONDAMENTALE

Soit un volume VC d'un fluide parfait animé d'une accélération γ , délimité par une surface S dans un repère Galiléen R.



$$\sum \vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_V = m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$$

avec

$$\vec{F}_S = -\oint_S p \cdot \vec{n} \cdot dS \quad \& \quad \vec{F}_V = \int_{VC} \rho \cdot \vec{g} \cdot d\tau$$

La formule du gradient permet de passer d'une intégrale de surface à une intégrale de volume

$$\text{D'où} \quad \oiint_S f \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_{VC} \vec{grad}(f) \cdot d\tau$$

$$-\iiint_{VC} \vec{\nabla}(p) \cdot d\tau + \iiint_{VC} \rho \cdot \vec{g} \cdot d\tau = \iiint_{VC} \rho \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\tau \implies -\nabla(p) + \rho \cdot \vec{g} = \rho \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$$

25/12/2006

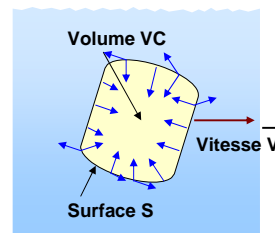
M.D.F. - Rafic Younés

5

ÉQUATION FONDAMENTALE

Généralisation

Soit σ le tenseur des forces surfaciques et f_v le champ des forces volumiques



$$\vec{F}_S = \oint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad \& \quad \vec{F}_V = \int_{VC} \vec{f}_v \cdot d\tau$$

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_V = m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$$

La formule d'Ostogradski permet de passer d'une intégrale de surface à une intégrale de volume

$$\text{D'où} \quad \oiint_S f \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_{VC} \text{div}(f) \cdot d\tau$$

$$-\iiint_{VC} \nabla(\vec{\sigma}) \cdot d\tau + \iiint_{VC} \vec{f}_v \cdot d\tau = \iiint_{VC} \rho \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\tau \implies -\nabla(\vec{\sigma}) + \vec{f}_v = \rho \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$$

25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

6

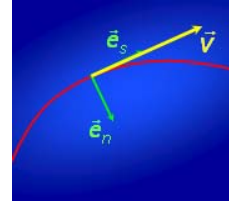
ÉQUATION FONDAMENTALE

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + [\vec{V} \cdot \text{grad}] \cdot \vec{V} \quad \text{avec} \quad \vec{V} \cdot \text{grad} = V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt} \vec{e}_s + \frac{V^2}{r} \vec{e}_n$$

En coordonnées
cylindriques :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \vec{e}_\theta - \omega^2 R \cdot \vec{e}_r$$



$$\begin{aligned} [\vec{V} \cdot \text{grad}] \cdot \vec{V} &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \wedge \text{rot}(\vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p) + \vec{g} \\ \frac{1}{2} \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \wedge \text{rot}(\vec{V}) & \end{aligned}$$

25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

7

ÉQUATION FONDAMENTALE

- | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> □ 5 inconnues... □ Pression □ Masse volumique □ 3 composantes de la vitesse | <ul style="list-style-type: none"> □ 5 équations... □ 1 Équation de continuité □ 3 Équations du principe fondamentale de la dynamique □ Masse volumique constante |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

25/12/2006

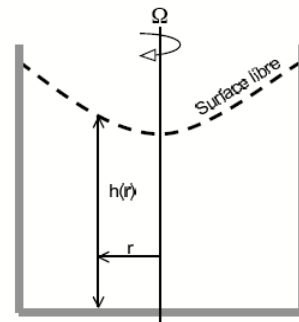
M.D.F. - Rafic Younés

8

APPLICATION

- Soit un réservoir cylindrique rempli d'un fluide incompressible de masse volumique ρ et animé d'un vitesse de rotation $\vec{\Omega} = \Omega \cdot \vec{k}$.

- Trouver l'équation de la surface libre du fluide en écoulement établi.



25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

9

APPLICATION

Projection de l'Équation d'Euler dans le repère cylindrique :

$$-\frac{1}{\rho} \nabla(p) + \vec{g} = \frac{dV}{dt} \cdot \vec{e}_\theta - \Omega^2 \cdot R \cdot \vec{e}_r$$

Axe ortho-radial : $-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \implies p = p(r, z)$

Axe radial : $-\Omega^2 \cdot r = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \implies p(r, z) = \rho \cdot \Omega^2 \cdot \frac{r^2}{2} + f(z)$

Axe vertical : $-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \implies p(r, z) = \rho \cdot \Omega^2 \cdot \frac{r^2}{2} - \rho g \cdot z + C^{te}$

A la surface $p = p_{atm}$: $z = \Omega^2 \cdot \frac{r^2}{2g} + \frac{p_{atm}}{\rho \cdot g} + C^{te}$

25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

10

THEOREME DE BERNOULLI

L'équation fondamentale de la dynamique peut s'écrire :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(V^2) - \vec{V} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\nabla}(p) + \vec{g}$$

Hypothèses de l'écoulement :

-Fluide parfait Incompressible : $\rho = C^{te} \implies -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\nabla}(p) = \overrightarrow{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right)$

-Écoulement permanent: $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \mathbf{0}$

-Fluide soumis uniquement à la pesanteur :

$$\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z = -\overrightarrow{\text{grad}}(g \cdot z) = -\overrightarrow{\nabla}(g \cdot z)$$

THEOREME DE BERNOULLI

$$\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = -\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \overrightarrow{\nabla}(g \cdot z) \implies \overrightarrow{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g \cdot z\right) = \vec{V} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})$$

Écoulement irrotationnel:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \mathbf{0}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g \cdot z\right) = \mathbf{0}$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g \cdot z = C^{te}$$

Écoulement rotationnel:

$$\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g \cdot z\right) \cdot d\vec{l} = \vec{V} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \cdot d\vec{l}$$

Sur L.D.C. : $\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g \cdot z\right) = \mathbf{0}$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g \cdot z = C^{te}$$

Le long d'une ligne de courant, la quantité $p/\rho + V^2/2 + g \cdot z$ se conserve.
Si l'écoulement est irrotationnel, la constante est la même dans tout le fluide

THEOREME DE BERNOULLI

□ Multiplions l'équation de Bernoulli par $\rho \cdot VC$:

$\rho \cdot VC$: Travail des forces de pression;

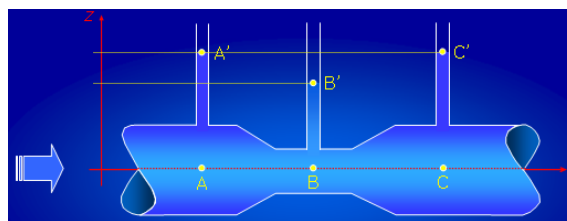
$\rho \cdot g \cdot z \cdot VC$: Énergie potentielle due aux forces de pesanteurs;

$0,5 \cdot \rho \cdot V^2 \cdot VC = 0,5 \cdot m \cdot V^2$: Énergie cinétique

La somme $p \cdot VC + m \cdot \frac{V^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z \cdot VC$ correspond à une énergie totale constante.

APPLICATION 1

Effet Venturi –
Mesure de débit :



Bilan de continuité :

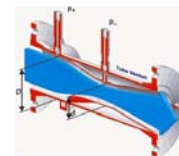
$$q_v = S_A \cdot V_A = S_B \cdot V_B$$

Bilan dynamique :

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + g \cdot z_A = \frac{p_B}{\rho} + \frac{V_B^2}{2} + g \cdot z_B$$

OR $z_A = z_B$

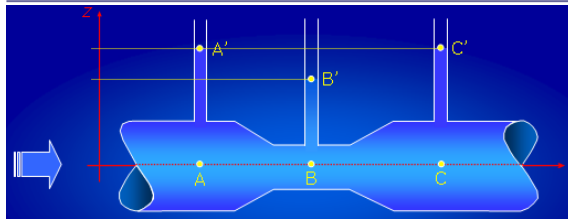
$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} = \frac{p_B}{\rho} + \frac{V_B^2}{2}$$



Effet Venturi :

$$S_A > S_B \Rightarrow V_A < V_B \Rightarrow p_A > p_B$$

APPLICATION 1



$$q_v = \frac{\pi \cdot D_A^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2g \cdot \Delta z}{(D_A/d_B)^4 - 1}}$$

$$q_v = S_A \cdot V_A = S_B \cdot V_B \implies V_B = \frac{q_v}{S_B} \quad \& \quad V_A = \frac{q_v}{S_A}$$

$$\begin{aligned} p_A &= p_{atm} + \rho \cdot g \cdot z_{A'} \\ p_B &= p_{atm} + \rho \cdot g \cdot z_{B'} \end{aligned} \implies \frac{p_{atm}}{\rho} + g \cdot z_{A'} + \frac{V_A^2}{2} = \frac{p_{atm}}{\rho} + g \cdot z_{B'} + \frac{V_B^2}{2}$$

$$\Delta z = z_{A'} - z_{B'} \implies q_v = S_A \cdot \sqrt{\frac{2g \cdot \Delta z}{(S_A/S_B)^2 - 1}}$$

25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

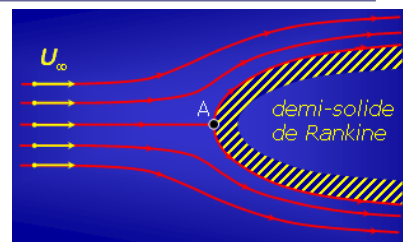
15

APPLICATION 2

Sonde de pression –
Tube de Pitot :

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2} + g \cdot z_\infty = \frac{p_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + g \cdot z_A$$

$$z_A = z_\infty \implies \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2} = \frac{p_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2}$$



La cinématique des mouvement montre qu'il existe des points d'arrêt

$$V_A = 0 \implies p_A = p_\infty + \rho \cdot \frac{V_\infty^2}{2}$$

$\implies p_A$: Pression de stagnation

25/12/2006

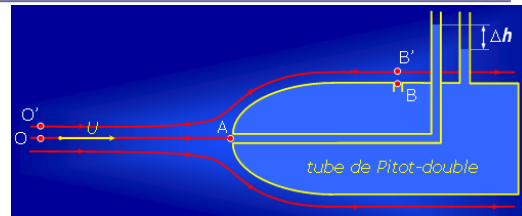
M.D.F. - Rafic Younés

16

APPLICATION 2

Manomètre A :
Mesure de p_A

Manomètre B :
Mesure de $p_B = p_\infty$



$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2} + g \cdot z_\infty = \frac{p_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + g \cdot z_A$$

$$z_A = z_\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2} = \frac{p_A}{\rho} \quad \Rightarrow \quad V_\infty^2 = 2 \left(\frac{p_A - p_\infty}{\rho} \right)$$

$$V_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2} = \frac{p_A}{\rho} \quad \Rightarrow \quad V_\infty^2 = 2 \left(\frac{p_A - p_\infty}{\rho} \right)$$

$$p_A - p_\infty = \rho \cdot g \cdot \Delta h \quad \Rightarrow \quad V_\infty = \sqrt{2g \cdot \Delta h}$$

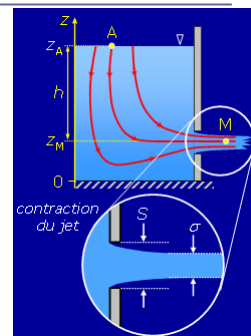
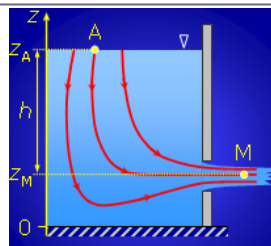
25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

17

APPLICATION 3

Écoulement à niveau constant – Théorème de Torricelli :



$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + g \cdot z_A = \frac{p_M}{\rho} + \frac{V_M^2}{2} + g \cdot z_M$$

$$p_A = p_M = p_{atm}$$

$$h = z_A - z_M \quad \Rightarrow \quad \frac{V_M^2}{2} - \frac{V_A^2}{2} = g \cdot h \quad \Rightarrow \quad V_M^2 \left(1 - \frac{S_M^2}{S_A^2} \right) = 2g \cdot h$$

$$\frac{S_M}{S_A} \lll 1 \quad \Rightarrow \quad V_M = \sqrt{2g \cdot h} \quad \Rightarrow \quad q_v = \sigma \cdot \sqrt{2g \cdot h} = C_c \cdot S_M \cdot \sqrt{2g \cdot h}$$

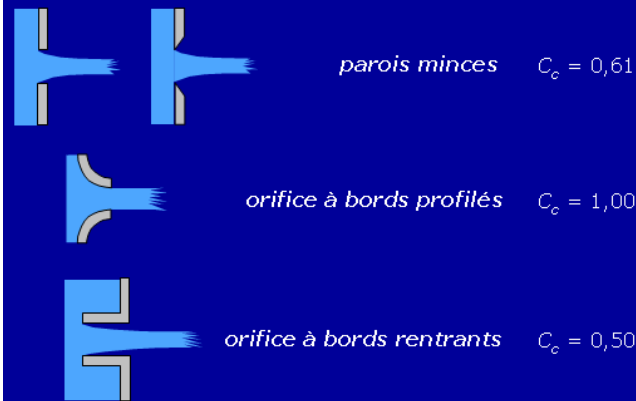
25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

18

APPLICATION 3

Le coefficient de contraction dépend de la géométrie de l'orifice.
De manière générale, C_c est déterminé expérimentalement et tabulé :



25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

19

THEOREME D'EULER

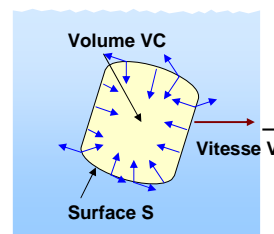
Soit un volume VC d'un fluide parfait animé d'une accélération γ ,
délimité par une surface S dans un repère Galiléen R.

Soit \vec{Q} la quantité de mouvement du VC

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{T} + \vec{R}$$

T : Forces de surface

R : Forces de volume



25/12/2006

M.D.F. - Rafic Younés

20

THEOREME D'EULER

Théorème de transport de Reynolds :

$$\left. \frac{dG}{dt}(\bar{P}, t) \right|_{\text{sys}} = \left. \frac{\partial G}{\partial t}(\bar{P}, t) \right|_{\text{VC}} + \int_{\text{SC}} \rho \cdot \frac{\partial G}{\partial M} \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

Soit : $G(\bar{P}, t) = Q(\bar{P}, t) = \iiint_{\text{VC}} \rho \cdot \vec{V} \cdot d\tau$

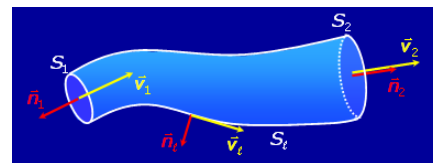
$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \iiint_{\text{VC}} \rho \cdot \vec{V} \cdot d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\text{VC}} \rho \cdot \vec{V} \cdot d\tau + \int_{\text{SC}} \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

$$\Rightarrow \bar{T} + \bar{R} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\text{VC}} \rho \cdot \vec{V} \cdot d\tau + \int_{\text{SC}} \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

En régime permanent : $\bar{T} + \bar{R} = \int_{\text{SC}} \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS$

APPLICATION

Appliquons le résultat précédent au cas d'un tube de courant d'un fluide incompressible. On suppose la vitesse constante en tout point d'une même section. L'écoulement est aussi permanent :



$$\Rightarrow \bar{T} + \bar{R} = \int_{\text{SC}} (\rho \cdot \vec{V}) \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

$$\bar{T} + \bar{R} = \int_{S_1} (\rho \cdot \vec{V}) \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_2} (\rho \cdot \vec{V}) \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_3} (\rho \cdot \vec{V}) \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

$-\vec{V}_1$
 \vec{V}_2
 0

$$\Rightarrow \bar{T} + \bar{R} = -\rho \cdot \vec{V}_1 \cdot V_1 \cdot S_1 + \rho \cdot \vec{V}_2 \cdot V_2 \cdot S_2 \Rightarrow \bar{T} + \bar{R} = q_m \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

APPLICATION

