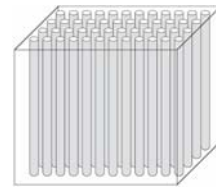

Matériaux Composites

Prof. Rafic YOUNES
Master Mécanique 3M
Beyrouth – 2008



Plan

- ▣ Quelques Rappel de Mécanique
- ▣ La conception d'un stratifié
- ▣ Problème d'Optimisation en 2D ou 3D
- ▣ Optimisation tu tissage orthogonal 3D
- ▣ Optimisation du tissage interlock 2.5D

Quelques rappels de mécanique

□ Théories

d'homogénéisation:

permettent de calculer les caractéristiques mécaniques du matériaux homogénéisé à partir des caractéristiques des phases et de la fraction volumique V_f

$$E_1 = V_f E_f + (1 - V_f) E_m$$

$$\nu_{12} = V_f \nu_f + (1 - V_f) \nu_m$$

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{V_f E_m + (1 - V_f) E_f}$$

$$G_{12} = \frac{G_f G_m}{V_f G_m + (1 - V_f) G_f}$$

□ Théorie classique (lois des mélanges)

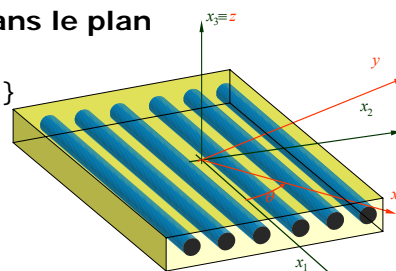
Quelques rappels de mécanique

□ Hypothèse de base: état plan des contraintes

□ Le comportement orthotrope dans le plan (notation de Voigt):

- dans les axes, repère $\{x_1, x_2, x_3\}$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$



- hors axes: repère $\{x, y, z\}$ • Les Q_{xs} et Q_{ys} couplent contraintes normales et distorsions

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix}$$



Quelques rappels de mécanique

- **Changement de repère:** les composantes de \mathbf{Q} se transforment comme combinaison des puissance d'ordre 4 des fonctions circulaires c et s de $\theta \rightarrow$ ceci constitue une difficulté majeure dans les pb de conception où les orientations des couches figurent parmi les variables de conception (toujours avec les stratifiés)

$$Q_{xx} = Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}s^4$$

$$Q_{xy} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4)$$

$$Q_{yy} = Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}c^4$$

$$Q_{xs} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})s^3c$$

$$Q_{ys} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sc^3$$

$$Q_{ss} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4)$$

$$\begin{aligned} c &= \cos \theta \\ s &= \sin \theta \end{aligned}$$

Quelques rappels de mécanique

- **Modules de l'ingénieur**

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}^{-1}$$

$$E_x = \frac{1}{S_{xx}}, \quad E_y = \frac{1}{S_{yy}}, \quad \nu_{xy} = -\frac{S_{xy}}{S_{xx}},$$

$$G_{xy} = \frac{1}{S_{ss}}, \quad \eta_{xy,x} = \frac{S_{xs}}{S_{xx}}, \quad \eta_{xy,y} = \frac{S_{ys}}{S_{yy}}.$$

- $\eta_{xy,x}$ et $\eta_{xy,y}$: coefficients d'influence mutuelle, nuls pour les matériaux isotropes et pour l'orthotropie dans les axes

Quelques rappels de mécanique

- ❑ **Critères de résistance:** l'anisotropie et l'hétérogénéité obligent la formulation de critères de résistance *ad hoc*

- ❑ Critère de Tsai-Hill

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{S}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} = 1$$

- ❑ Critère de Tsai-Wu

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} + \frac{X_c - X_t}{X_t X_c} \sigma_1 + \frac{Y_c - Y_t}{Y_t Y_c} \sigma_2 + 2F_{12}^* \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_t X_c} = 1$$

Quelques rappels de mécanique

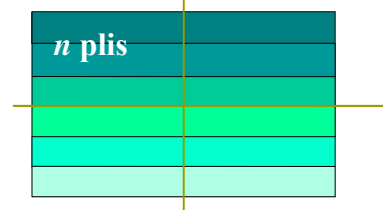
- ❑ **La théorie classique des stratifiés**

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\chi} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k(\delta_k)(z_k - z_{k-1});$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k(\delta_k)(z_k^2 - z_{k-1}^2);$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k(\delta_k)(z_k^3 - z_{k-1}^3);$$



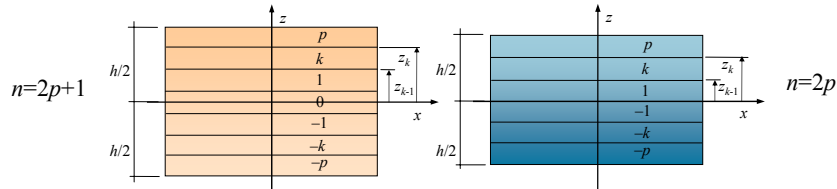
A: tenseur du comportement de membrane

D: tenseur du comportement de flexion

B: tenseur de couplage

Quelques rappels de mécanique

□ Stratifiés à plis identiques



$$\mathbf{A} = h_L \sum_{k=-p}^p \mathbf{Q}_k \quad h_L = h/n$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} h_L^2 \sum_{k=-p}^p b_k \mathbf{Q}_k \quad b_k = \begin{cases} 2k & \text{si } n = 2p+1 \\ 2k - k/|k|, b_0 = 0 & \text{si } n = 2p \end{cases}$$

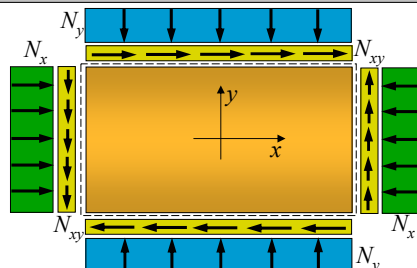
$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} h_L^3 \sum_{k=-p}^p d_k \mathbf{Q}_k \quad d_k = \begin{cases} (12k^2 + 1)/4 & \text{si } n = 2p+1 \\ 3k^2 - 3|k| + 1, d_0 = 0 & \text{si } n = 2p \end{cases}$$

Quelques rappels de mécanique

□ Stabilité et bifurcation:

- Équation linéarisée de flambement (pour stratifiés avec $\mathbf{B} = \mathbf{0}$) avec chargement exclusivement dans le plan

$$D_{11} w_{,xxxx} + 4D_{16} w_{,xxxy} + 2(D_{12} + 2D_{66}) w_{,xxyy} + 4D_{26} w_{,xyyy} + D_{22} w_{,yyyy} = N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy}$$



Quelques rappels de mécanique

- **Fréquences propres**
- Équation linéarisée

$$D_{11}w_{,xxxx} + 4D_{16}w_{,xxxy} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xxyy} + 4D_{26}w_{,xyyy} + D_{22}w_{,yyyy} = q + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy}$$

$$q = -\mu \dot{w}$$

- μ : masse par unité de surface de la plaque

Quelques rappels de mécanique

- **Les paramètres de Tsai et Pagano (1967)**
- La transformation des composantes de \mathbf{Q} par rotation θ de repère (page 13) peut être exprimée en fonction des angles 2θ et 4θ et de 7 paramètres U_i , dits les paramètres de Tsai et Pagano

$$\begin{aligned} Q_{xxxx}(\theta) &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + 2U_6 \sin 2\theta + U_3 \cos 4\theta + U_7 \sin 4\theta \\ Q_{xxyy}(\theta) &= U_4 - U_3 \cos 4\theta - U_7 \sin 4\theta \\ Q_{xxxy}(\theta) &= 2U_6 \cos 2\theta - U_2 \sin 2\theta + 2U_7 \cos 4\theta - 2U_3 \sin 4\theta \\ Q_{yyyy}(\theta) &= U_1 - U_2 \cos 2\theta - 2U_6 \sin 2\theta + U_3 \cos 4\theta + U_7 \sin 4\theta \\ Q_{xyyy}(\theta) &= 2U_6 \cos 2\theta - U_2 \sin 2\theta - 2U_7 \cos 4\theta + 2U_3 \sin 4\theta \\ Q_{xyxy}(\theta) &= U_5 - U_3 \cos 4\theta - U_7 \sin 4\theta \end{aligned}$$

Quelques rappels de mécanique

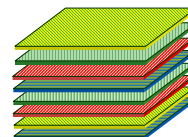
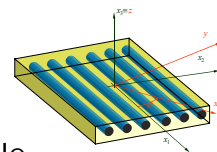
- Les paramètres U_i sont exprimés en fonction des composantes de \mathbf{Q} dans le repère de base ($\theta=0$)

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{3Q_{11} + 2Q_{12} + 3Q_{22} + 4Q_{66}}{8}, & U_2 &= \frac{Q_{11} - Q_{22}}{2} \\
 U_3 &= \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8}, & U_4 &= \frac{Q_{11} + 6Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8} \\
 U_5 &= \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} + 4Q_{66}}{8}, & U_6 &= \frac{Q_{16} + Q_{26}}{2} \\
 U_7 &= \frac{Q_{16} - Q_{26}}{2}, & & U_1 - U_4 = 2U_5
 \end{aligned}$$

- U_6 et U_7 sont nuls pour les matériaux orthotropes si le repère de base est celui d'orthotropie
- Contrairement à ce qui est affirmé souvent, les U_i ne sont pas tous des invariants tensoriels, mais ils dépendent du repère de base choisi; en effet, seulement U_1 , U_4 et U_5 sont invariants (voir pages 43 et 44)

La conception d'un stratifié

- La conception d'une structure en composite comporte la **conception du matériau même**
- Paramètres de la conception: phases, orientations, nombre de couches etc.
- Problèmes typiques de la conception optimale d'un stratifié: minimisation du poids, maximisation de la rigidité et/ou de la résistance, de la charge critique, de la fréquence des vibrations, minimisation des contraintes de délaminage etc.
- Mais aussi conception de propriétés élastiques fondamentales: orthotropie, couplage, isotropie etc.**



La conception d'un stratifié

- Typologie des variables: continues, discrètes, groupées
- Multiplicité des objectifs
- Forte **non-linéarité et multi-modalité**, avec, parfois, solutions non isolées
- Nombre de variables élevé
- Comportement mécanique complexe (couplages, différence de comportement en membrane et en flexion, etc.)

Mais surtout....

La conception d'un stratifié

- Les premiers travaux sur l'optimisation des stratifiés remontent aux années 70
- Les travaux concernent normalement des propriétés mécaniques classiques:
 - maximisation de la rigidité
 - maximisation des fréquences propres
 - maximisation de la charge critique
- D'autres travaux concernent au contraire des propriétés spécifiques de stratifiés:
 - minimisation des coefficients de dilatation thermique dans une ou plusieurs directions
 - distribution optimale des axes d'orthotropie

La conception d'un stratifié

- **Optimisation de la rigidité de membrane**
- Les constantes de l'ingénieur en membrane sont, dans les hypothèses vues,

$$E_1 = \frac{1}{h} \left(A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right), E_2 = \frac{1}{h} \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right), G_{12} = \frac{A_{66}}{h}, \nu_{12} = \frac{A_{12}}{A_{22}}$$

La conception d'un stratifié

- Méthode de Rayleigh-Ritz: pour une plaque rectangulaire appuyée sur les bords on cherche une solution sous la forme

$$w = a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

- Dans ce cas, les charges critiques sont données par la relation

$$N_1 \left[1 + \frac{N_2 a^2 n^2}{N_1 b^2 m^2} \right] = - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left[D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{a^2 n^2}{b^2 m^2} + D_{22} \frac{a^4 n^4}{b^4 m^4} \right]$$

- La charge critique est maximisée lorsque le terme entre crochets à deuxième membre est maximum → la solution dépend du rapport a/b et est donc différente pour les différents modes

La conception d'un stratifié

- Méthode de Rayleigh-Ritz: pour une plaque rectangulaire appuyée sur les bords, on cherche une solution sous la forme

$$w = a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \omega_{mn} t$$

- Dans ce cas, les fréquences propres sont données par la relation

$$\omega_{mn}^2 = \frac{m^4 \pi^4}{\mu a^4} \left[D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{a^2 n^2}{b^2 m^2} + D_{22} \frac{a^4 n^4}{b^4 m^4} \right]$$

- La première fréquence propre est maximisée lorsque le terme entre crochets à deuxième membre est maximum → la solution est la même que pour la charge critique, car la FO est la même, ainsi que le domaine de faisabilité: les stratifiés qui maximisent la charge critique maximisent aussi la première fréquence propre

La conception d'un stratifié

- Une limitation de beaucoup d'études concerne le choix, fait *a priori*, de l'ensemble d'orientations possibles, le plus souvent limitées au cas de stratifiés nommés quasi-isotropes [$0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$]
- Une justification de ce choix est technologique, mais aujourd'hui c'est une raison qu'on peut accepter de moins en moins; en outre, ce choix est extrêmement contraignant dans un processus d'optimum

La conception d'un stratifié

- La question est la suivante: est il possible de formaliser des problèmes **d'optimisation globale d'un stratifié?**
- A savoir, est-il possible de prendre en compte directement dans le processus de conception les propriétés élastiques (découplage, quasi-homogénéité, orthotropie etc.)?
- La réponse à ces questions passe par une nouvelle formulation, plus efficace, des problèmes d'optimum concernant les stratifiés, à partir de la représentation même des quantités mécaniques en jeu: les tenseurs de l'élasticité (**Q, A, B, D, C**)

La conception d'un stratifié

- Solutions exactes totalement isotropes

N. de plis	Orientations	Séquence d'empilement
18 (5 sol.)	0= -60° 1= 0° 2= 60°	0 1 2 0 1 2 2 2 1 1 0 0 1 0 0 2 2 1 0 1 2 2 0 1 1 2 0 1 2 0 2 0 1 0 1 2 0 1 2 2 0 1 1 2 0 2 1 0 1 0 2 0 2 1 0 1 2 2 1 0 2 0 1 1 0 2 1 2 0 0 2 1 0 1 1 2 2 2 0 0 2 1 0 0 1 1 1 2 2 0
24 (1 sol.)	0= -45° 1= 0° 2= 45° 3= 90°	0 1 2 3 2 3 1 3 0 2 0 1 0 1 3 1 2 0 2 3 2 3 0 1
27 (219 sol.)	0= -60° 1= 0° 2= 60°	0 0 1 2 1 2 1 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 1 2 2 0 1 1 2 1 2 0 0 0 1 2 2 1 2 1 1 2 2 1 0 0 0 0 0 1 2 1 0 2 2 1 2 1 0 0 1 0 1 2 2 0 2 1 2 2 1 2 1 0 1 0 0 1 0 2 0 0 1 2 1 2 0 1 0 1 2 2 2 0 1 2 2 1 0 1 2 1 0 0 1 2 0 0 1 2 1 2 0 1 0 2 2 2 1 0 1 2 1 1 0 1 2 2 0 0 1 2 0 0 2 1 2 1
30 (29 sol.)	0= 0° 1= 72° 2= 144° 3= 216° 4= 288°	0 1 2 3 3 0 4 4 1 2 4 4 2 2 3 1 1 3 1 0 0 0 0 2 3 3 4 4 2 1 0 1 2 3 4 3 0 2 1 4 4 2 4 1 3 1 3 0 2 0 0 3 2 4 1 0 1 2 3 4 0 1 2 3 4 4 0 2 1 3 3 4 2 1 3 1 2 0 4 0 0 4 3 2 1 0 1 2 4 3 0 1 2 3 4 3 0 2 1 4 4 2 4 3 1 1 3 0 2 0 0 1 2 4 3 0 3 2 1 4 0 1 2 3 4 4 1 0 3 2 2 4 3 3 0 2 1 1 4 0 1 4 3 0 0 2 2 1 4 3 0 1 2 3 4 3 4 0 1 2 2 4 1 3 0 2 4 1 3 0 3 4 1 0 0 2 2 1 3 4 0 1 2 3 4 4 3 0 1 2 2 4 1 3 0 2 3 1 4 0 3 4 1 0 0 2 2 1 4 3 0 1 2 3 4 4 2 0 3 1 3 1 4 2 0 4 3 2 1 0 1 3 2 0 0 4 4 2 1 3 0 1 2 3 4 4 2 0 3 3 1 4 1 2 0 1 3 2 4 0 1 4 2 0 0 3 3 2 4 1 0 1 2 3 3 4 4 0 1 2 2 4 1 4 0 3 3 1 2 2 0 0 1 3 4 0 3 1 4 2

La conception d'un stratifié

- Quelques solutions totalement orthotropes et découplés

7 p/lis	α	$-\alpha$	$-\alpha$	0	α	α	$-\alpha$					
8 p/lis	α	$-\alpha$	$-\alpha$	α	$-\alpha$	α	α	$-\alpha$				
9 p/lis	α	$-\alpha$	$-\alpha$	α	0	$-\alpha$	α	α	$-\alpha$			
	α	$-\alpha$	0	$-\alpha$	0	α	0	α	$-\alpha$			
10 p/lis	0	α	$-\alpha$	$-\alpha$	0	α	α	$-\alpha$	0			
	α	$-\alpha$	$-\alpha$	α	0	0	$-\alpha$	α	α	$-\alpha$		
	α	$-\alpha$	0	$-\alpha$	α	$-\alpha$	α	0	α	$-\alpha$		
11 p/lis	α	0	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	α	α	α	0	$-\alpha$		
	0	α	$-\alpha$	$-\alpha$	α	$-\alpha$	α	α	$-\alpha$	0		
	0	α	$-\alpha$	0	$-\alpha$	0	α	0	α	$-\alpha$		
	0	0	α	$-\alpha$	α	0	0	α	α	0		
	0	0	α	$-\alpha$	$-\alpha$	0	α	α	$-\alpha$	0		
12 p/lis	α	$-\alpha$	α	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	α	α	α	$-\alpha$	α	$-\alpha$
	α	$-\alpha$	$-\alpha$	α	0	0	0	$-\alpha$	α	α	$-\alpha$	$-\alpha$
	α	$-\alpha$	0	$-\alpha$	α	0	0	$-\alpha$	α	0	α	$-\alpha$
	α	$-\alpha$	0	0	$-\alpha$	α	$-\alpha$	α	0	0	α	$-\alpha$
	α	0	$-\alpha$	$-\alpha$	0	α	$-\alpha$	0	α	α	0	$-\alpha$
	α	0	$-\alpha$	0	$-\alpha$	$-\alpha$	α	α	0	α	0	$-\alpha$
	0	α	$-\alpha$	$-\alpha$	α	0	0	$-\alpha$	α	α	$-\alpha$	0
	0	α	$-\alpha$	0	$-\alpha$	α	$-\alpha$	α	0	α	$-\alpha$	0
	0	α	0	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	α	α	α	0	$-\alpha$	0
	0	0	α	$-\alpha$	$-\alpha$	α	$-\alpha$	α	α	$-\alpha$	0	0

La conception d'un stratifié

Un ex: 12 couches à sym carrée

Solution	Séquence des orientations (°)	f
BIANCA	[0/62.46/-53.44/81.56/-15.80/-75.75/66.59/0/-0.54/46.07/-28.12/-88.94]	2.27×10^5
BIANCA approximée	[0/62/-53/82/-16/-76/67/0/-1/46/-28/-89]	7.84×10^5
Gradient	[0/61.7640/-52.1221/82.6706/-18.2096/-78.3146/64.6143/1.0953/-2.5155/44.6293/-29.8974/-89.6532]	1.09×10^{13}
Gradient approximée	[0/62/-52/83/-18/-78/65/1/-2/45/-30/90]	8.56×10^5

Formulation du problème d'optimisation en 2D ou 3D

Objectifs:

**1- Prédiction des paramètres de tissage du composite
résistant sous un cas de chargement imposé**

a- Taux de fibre global

b- Proportion de fibre dans chaque direction

c- Type de renfort (Tex) et de résine

2- Prédiction des propriétés élastiques 3D

Les (6 ou 9) constantes de l'ingénieur

**En assurant le meilleur compromis
coût - performance - masse**

Formulation du problème d'optimisation en 2D ou 3D

**Les matériaux composites tissés présentent en générale
des architectures internes complexes. L'étude de leur
comportement mécanique est réduit à l'étude d'un
volume élémentaire représentant le motif interne (VER)**

**Diminuer la densité des plaques avec une meilleur
performance**

Recherche

**Minimum du volume de VER résistant
à un cas de chargement imposée**

Formulation du problème d'optimisation en 2D ou 3D

$$\text{Min } f(X)$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Sous contraintes

$$h_i(X) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$g_j(X) < 0 \quad j = 1, \dots, p$$

avec:

$f(x)$ la fonction objective

$$f(x) = \text{Volume du VER}$$

Tel que :

$x =$ (les paramètres géométriques et les fractions volumiques des mèches)

$h_i(x)$ les contraintes égalités

pour chaque mèche: chaîne, trame et verticale

$$A_{\text{mèche}} \cdot V_{f_k/m} \cdot \rho_f - Tex = 0$$

fraction volumique de fibre dans la mèche: $V_{f/m}$

$g_i(x)$ les contraintes inégalités

$$F_i \cdot \bar{\sigma}_i + F_{ij} \cdot \bar{\sigma}_i \cdot \bar{\sigma}_j - 1 < 0$$

$$V_{f \text{ min}} \leq V_{f_k/m} \leq V_{f \text{ max}}$$

$$\sigma_m - X_t \text{ résine} < 0$$

Formulation du problème d'optimisation en 2D ou 3D

1- Propriétés du tissage

- Propriétés mécaniques des constituants fibre et Résine
- Taux de fibre et proportion de fibre dans chaque direction

2- VER (Propriétés géométriques du tissage)

- Volume des compartiments: mèches et block de résine



Utilisation d'une technique d'homogénéisation périodique

$$C_{ij, Globale} = \frac{1}{V_t} \sum_{k=1}^n V_k \cdot C'_{ij, k}$$



Prédiction des propriétés mécaniques 3D

Formulation du problème d'optimisation en 2D ou 3D

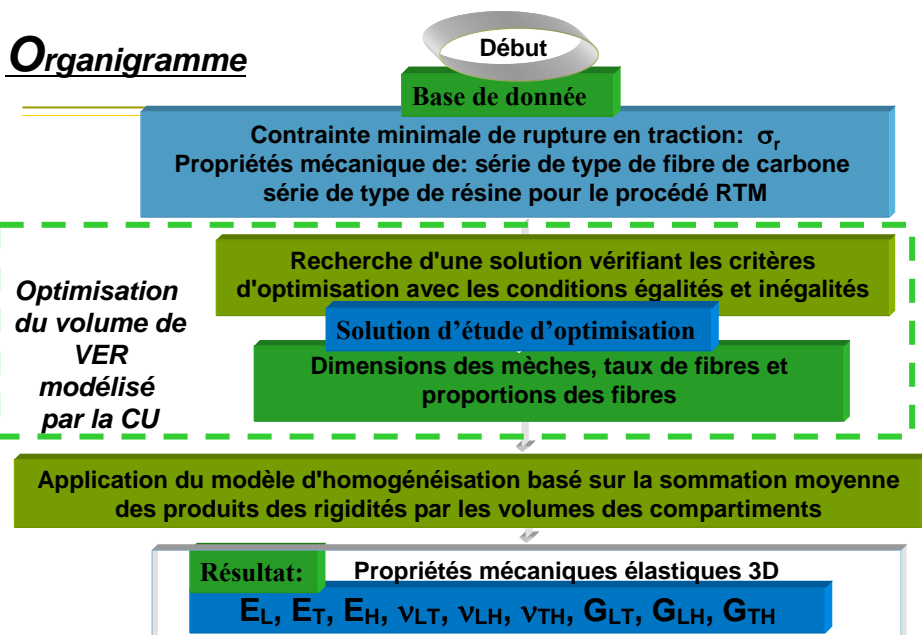
Extension du modèle à la prédiction des propriétés ultimes déterminées selon le critère 3D de rupture de Tsai-Wu écrit sous son écriture tensorielle

$$F_i \cdot \bar{\sigma}_i + F_{ij} \cdot \bar{\sigma}_i \cdot \bar{\sigma}_j = 1$$

avec:

F_i, F_{ii}, F_{ij} déterminés par les relations analogiques de Von Mises,
 fonction des contraintes limites des fibres
 $X+, X-, Y+, Y-, Z+, Z-, S, R, Q$
 Issus de la littérature et des travaux de Khellil¹

Organigramme



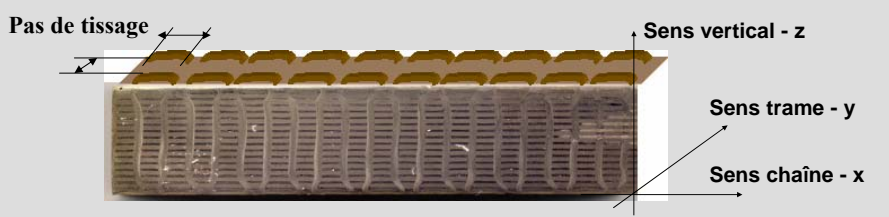
Optimisation du tissage orthogonal 3D

Connaissant

1- Le type de tissage 3D

Préforme tissée suivant les trois directions orthogonale

➤ Fibres orientées selon les trois directions cartésiennes



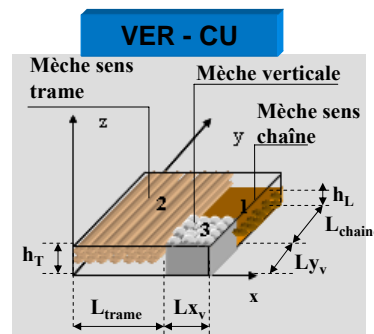
2- Le procédé de moulage par transfert de résine (RTM)

➤ Minimisation du coût de fabrication des préformes

Optimisation du tissage orthogonal 3D

Définition du VER :

➡ Six paramètres géométriques:
 $L_{chaîne}$, L_{trame} , $L_{x_{vert}}$, $L_{y_{vert}}$, h_L , h_T
 Trois paramètres fonctionnels:
 $V_{f_{chaîne}}$, $V_{f_{trame}}$, $V_{f_{vert}}$



$$V_{VER(CU)} = (L_{ch} + L_{orth\ trame})(L_{tr} + L_{orth\ chaîne})(h_{ch} + h_{tr})$$

Optimisation du tissage orthogonal 3D

Tenant compte de deux cas:

- 1- Diminuer les pas de tissage (les largeurs des mèches)
⇒ Augmentation des propriétés élastiques dans la 3^{ème} direction du VER
- 2- Diminuer l'épaisseur (hauteur du VER)
⇒ Diminution de la densité surfacique

La contrainte objective:

Recherche d'un VER à volume minimal, résistant à une contrainte de traction imposée



Les propriétés du tissage

Optimisation du tissage orthogonal 3D

Matériau testé

Préforme d'épaisseur: 8mm
Type de renforts T300J-Tex 369
Type de résine RTM6
Tissage équilibré
avec des proportions:
46% de fibre en sens chaîne
46% de fibre en sens trame
8% de fibre en sens verticale
Contrainte de rupture en traction
sens chaîne: $\sigma_r = 770 \text{ MPa}$

Contraintes dans l'étude d'optimisation

$$0.5 \leq V_{fk/m} \leq 0.6$$

$$10 \leq E_3 \leq 16$$

$$E_1 = E_2$$

$$\sigma_r \geq 770 \text{ MPa}$$

Optimisation du tissage orthogonal 3D

Comparaisons des propriétés géométriques en proportion de volume des compartiments du VER

Les compartiments	Matériaux testés (mesures - MEB)	Étude d'optimisation T300 J- Tex 396
	Proportion dans la CU	Proportion dans la CU
Mèche sens chaîne	30.82 %	39.74 %
Mèche sens trame	42.80 %	39.74 %
Mèche sens verticale	6.58 %	4.21 %
Résine	19.80 %	16.31 %
VER (CU)	100%	100%

Optimisation du tissage orthogonal 3D

Comparaisons des propriétés de tissage

	Contrainte de rupture	Taux de fibre	Densité du composite	Proportion de fibre dans les trois types de mèche		
				Mèche sens chaîne	Mèche sens trame	Mèche sens verticale
	σ_r (MPa)	V_f	ρ_c	P_{f1} %	P_{f2} %	P_{f3} %
Études expérimentales	770	0.59		46	46	8
Étude d'optimisation	790	0.6	11410	47.969	47.364	5.269
Écart entre les deux études				+1.97%	+1.97%	-2.73%

Résultats des modèles analytiques sont en accord avec les études expérimentaux

Optimisation du tissage orthogonal 3D

Comparaisons des propriétés mécaniques 3D

	E_1	E_2	E_3	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	G_{12}	G_{13}	G_{23}
	(GPa)	(GPa)	(GPa)				(GPa)	(GPa)	(GPa)
Modèle CU	57.30	58.63	19.80	0.072	0.267	0.269	3.687	3.553	3.451
Modèle CG	57.46	58.94	15.66	0.067	0.367	0.370	4.307	4.114	3.960
Étude optimisation T300J Tex 396	58.65	58.65	16	0.062	0.307	0.307	3.324	3.154	3.154
Modèle ajusté CU puis CG	60.05	56.19	16.08	0.062	0.305	0.339	3.763	3.635	3.168
Étude Exp.	57.5 ±1.8	-	15.53 4±1.0	0.028	0.269	0.268	4.114 ±0.05	-	-

Résultats des modèles analytiques sont en accord avec les études expérimentaux

Optimisation du tissage orthogonal 3D

Prediction des propriétés 3D par optimisation pour :
 $E_3=16\text{GPa}$ et une contrainte de rupture visée à 770 MPa

Type de fibre / RTM6	σ_r (MPa)	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	E_3 (GPa)	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	G_{12} (GPa)	G_{13} (GPa)	G_{23} (GPa)
T300J-Tex 198	790	58.65	58.65	16	0.062	0.307	0.307	3.32	3.15	3.15
T300J-Tex 386	790	58.65	58.65	16	0.062	0.307	0.307	3.32	3.15	3.15
T400H-Tex 386	870	63.38	63.38	16	0.061	0.318	0.317	3.30	3.13	3.13
T600S-Tex 1750	870	58.65	58.65	16	0.062	0.307	0.307	3.32	3.15	3.15
T700S-Tex 1650	940	58.65	58.65	16	0.062	0.307	0.307	3.32	3.15	3.15
T700G-Tex 1650	940	60.93	60.93	16	0.060	0.307	0.308	3.31	3.14	3.14
T800H-Tex 223	1090	73.46	73.46	16	0.052	0.320	0.319	3.26	3.08	3.08

Optimisation du tissage orthogonal 3D

Par comparaison entre les résultats d'optimisation et les études expérimentales, la fonction objective:

Minimiser le volume du VER
est validée sur le tissage orthogonale 3D

Application de la même méthodologie proposée dans cette étude sur un autre type de tissage

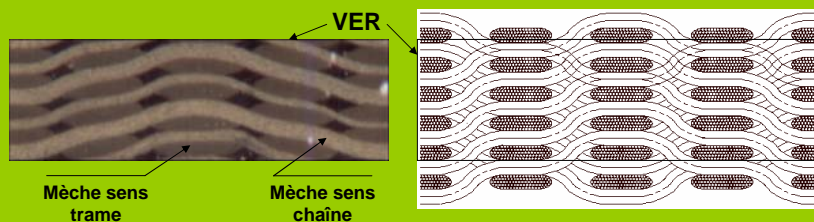
l'interlock 2.5D

Optimisation du tissage interlock 2.5D

Préforme tissé dans les deux directions chaîne et trame où les mèches sens chaîne interceptent les mèches sens trame sur plusieurs plis.

- **Le matériau testé:** renforcé en fibre de carbone et injecté de résine par le procédé RTM.

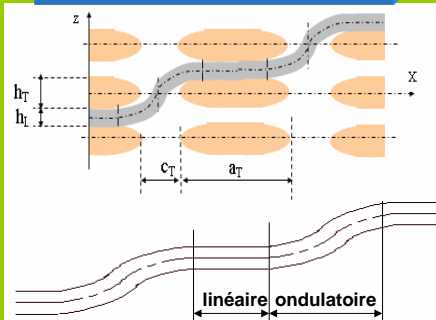
Les mèches sens chaîne intercepte les mèches sens trame en trois plis, sur deux plans verticaux consécutifs.



Optimisation du tissage interlock 2.5D

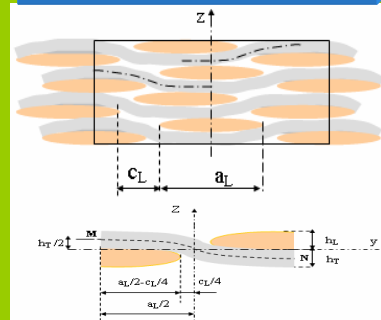
Modélisation géométrique du VER

Section longitudinale du VER



La mèche sens chaîne est modélisée en forme d'escalier

Section transversale du VER



La mèche sens trame est modélisée en forme ondulatoire



Six paramètres géométriques: a_L , c_L , a_T , c_T , h_L , h_T
 Deux paramètres fonctionnels: $Vf_{chaîne}$, Vf_{trame}

Optimisation du tissage interlock 2.5D

Matériau testé

Préforme d'épaisseur 8mm
 Type de renforts T300J-Tex 369
 Type de résine RTM6

Tissage avec les proportions:

35% de fibre en sens chaîne
 65% de fibre en sens trame
 Taux de fibre global 38%

Contrainte de rupture
 sous essai de traction uniaxial

En sens chaîne :

$$\sigma_r = 400 \text{ MPa}$$

En sens trame :

$$\sigma_r = 480 \text{ MPa}$$

Ce type de matériau n'est pas équilibré en pourcentage de fibre entre le sens chaîne et le sens trame

Optimisation du tissage interlock 2.5D

Mise en valeur de l'étude d'optimisation

Trois propositions de cas de tissage sont recherchés:

1- Résistance du matériau sous traction uniaxial dirigée selon le sens chaîne

⇒ Propriétés 3D fort dans le sens chaîne

2- Résistance du matériau sous traction uniaxial dirigée selon le sens trame

⇒ Propriétés 3D fort dans le sens trame

3- Résistance du matériau sous tensions biaxiales dans le plan de la plaque

⇒ Recherche de propriétés 3D d'un matériaux résistant dans les deux directions chaîne et trame

⇒ Comparaison avec les matériaux testés

Optimisation du tissage interlock 2.5D

1- Résistance du matériau sous traction uniaxial dirigée selon le sens chaîne:

Contrainte de critère de rupture dans l'étude d'optimisation

Appliqué uniquement sur la mèche sens chaîne en sa partie linéaire

$$F_i \cdot \bar{\sigma}_i + F_{ij} \cdot \bar{\sigma}_i \cdot \bar{\sigma}_j - 1 = 0$$

contrainte imposée $\sigma_i (x_1, 0, 0, 0, 0)$

Limite imposée sur $E_3 = 13.5$ GPa

⇒ Propriétés élastique 3D et proportions de fibre du tissage prédit par optimisation pour le cas de la T300J-TEX 396

Contrainte imposée x_1	σ_r (MPa)	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	E_3 (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{13} (GPa)	G_{23} (GPa)	Pf %	Pf ₁ %	Pf ₂ %
500 MPa	410	35.63	42.12	13.5	2.68	7.09	3.95	32.7	45.7	54.3
600 MPa	500	42.41	35.55	13.5	2.77	7.85	3.88	30.7	52.5	47.5
700 MPa	580	49.19	32.94	13.5	2.97	8.67	3.73	29.1	56.4	43.6

Optimisation du tissage interlock 2.5D

2- Résistance du matériau sous traction uniaxial dirigée selon le sens trame:

Contrainte de critère de rupture dans l'étude d'optimisation

Appliqué uniquement sur la mèche ondulatoire sens trame

$$F_i \cdot \bar{\sigma}_i + F_{ij} \cdot \bar{\sigma}_i \cdot \bar{\sigma}_j - 1 = 0$$

Contrainte imposée $\sigma_i(0, x_2, 0, 0, 0, 0)$

Limite imposée sur $E_3 = 13.5$ GPa

Propriétés élastique 3D et proportions de fibre du tissage prédit par optimisation pour le cas de la T300J-TEX 396:

Contrainte imposée x_2	σ_r (MPa)	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	E_3 (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{13} (GPa)	G_{23} (GPa)	Pf %	Pf ₁ %	Pf ₂ %
500 MPa	490	39.54	38.25	13.5	2.73	7.51	3.93	31.7	49.7	50.3
600 MPa	520	36.72	46.05	13.5	2.86	7.22	4.14	34.1	42.7	57.3
700 MPa	640	34.48	54.27	13.5	3.06	6.99	4.33	36.4	36.3	63.7

Optimisation du tissage interlock 2.5D

3- Résistance du matériau sous tension biaxiale dans le plan de la plaque

Contrainte de critère de rupture dans l'étude d'optimisation

Appliqué en même temps sur la mèche sens chaîne et sur la mèche ondulatoire sens trame

$$F_i \cdot \bar{\sigma}_i + F_{ij} \cdot \bar{\sigma}_i \cdot \bar{\sigma}_j - 1 < 0$$

contrainte imposée $\sigma_i(x_1, x_2, 0, 0, 0, 0)$

Comparaison des propriétés de tissage: optimisation / test

	Contrainte de rupture	Densité du composite H=8mm	Taux de fibre global	Proportion de fibre dans les mèches	
				Mèche sens chaîne	Mèche sens trame
	σ_r (MPa)	ρ_c	P _f %	P _{f1} %	P _{f2} %
Etudes expérimentales et propriétés du tissage	$x_1 = 400$ $x_2 = 480$		38	35	65
Etude d'optimisation T300J-TEX 396	$x_1 = 530$ $x_2 = 770$	1351.3	36.9	37.3	62.7

Optimisation du tissage interlock 2.5D

3- Résistance du matériau sous tension biaxiale dans le plan de la plaque avec la contrainte imposée $\sigma_i (x_1, x_2, 0, 0, 0, 0)$

Comparaisons des propriétés géométriques en proportion de volume des compartiments du VER

	Matériaux testés (mesures- MEB)		Étude d'optimisation T300 J- Tex 396	
	Volume (mm ³)	Proportion	Volume (mm ³)	Proportion
Mèche sens chaîne	10.57	18.01 %	8.29	21.15 %
Mèche sens trame	26.18	44.58 %	15.29	39.01 %
Résine	21.98	37.41 %	15.62	39.84 %
Le VER	58.73	100 %	39.2	100 %

⇒ VER à volume minimal avec plus de proportion en résine, donc moins de fibre

Optimisation du tissage interlock 2.5D

3- Résistance du matériau sous tension biaxiale dans le plan de la plaque avec la contrainte imposée $\sigma_i (x_1, x_2, 0, 0, 0, 0)$

Comparaison des propriétés élastique mécanique 3D : optimisation / test

	σ_{r1} (MPa)	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	E_3 (GPa)	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	G_{12} (GPa)	G_{13} (GPa)	G_{23} (GPa)
Modèle analytique	570	53.43	62.42	13.4 2	0.064	0.608	0.237	4.11	6.66	4.55
Optimisation avec T300J- Tex 396	530	49.38	57.38	13.5	0.065	0.665	0.189	3.75	7.82	4.24
Études Exp.	392.01 ±26.63 *	53.31 ±0.29	62.35 ±1.34	-	0.080 ±0,01	-	-	-	-	-

Optimisation du tissage interlock 2.5D

3- Résistance du matériau sous tension biaxiale dans le plan de la plaque avec la contrainte imposée $\sigma_i (x_1, x_2, 0, 0, 0, 0)$

Variation du type de fibre de carbone

Type de fibre / RTM6	Propriétés élastiques				Proportion de fibre			Volume	densité
	σ_{f1} (MPa)	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	E_3 (GPa)	Pf	Pf ₁	Pf ₂	VER (mm ³)	ρ_c
T300J–Tex 198	510	49.38	57.85	13.5	37.33	37.61	62.39 ₂	13.09	1353.8
T300J–Tex 386	530	49.38	57.38	13.5	36.95	37.29	62.71	39.19	1351.3
T300J–Tex 800	540	49.41	57.07	13.5	36.65	37.04	62.96	102.91	1349.2
T400H–Tex 198	510	53.88	63.63	13.5	37.56	37.11	62.89	13.34	1362.9
T400H–Tex 386	530	53.81	63.09	13.5	37.76	36.76	63.24	35.35	1360.2
T700S–Tex 800	540	49.41	57.08	13.5	36.65	37.04	62.96	94.77	1356.5
T700S–Tex 1650	550	49.45	56.88	13.5	36.42	36.84	63.16	273.76	1354.9
T800H–Tex 223	520	62.61	71.68	13.5	36.88	37.45	62.55	15.68	1361.9

Optimisation du tissage interlock 2.5D

Variation du type de tissage de l'interlock 2.5D

Effet de la variation du nombre d'entrelacement (n_e) des mèches sens chaîne entre les plis des mèches sens trame, sur les propriétés élastique mécaniques 3D et sur les propriétés du tissage

On propose dans cette étude quatre cas pour $n_e = 1 \dots 4$

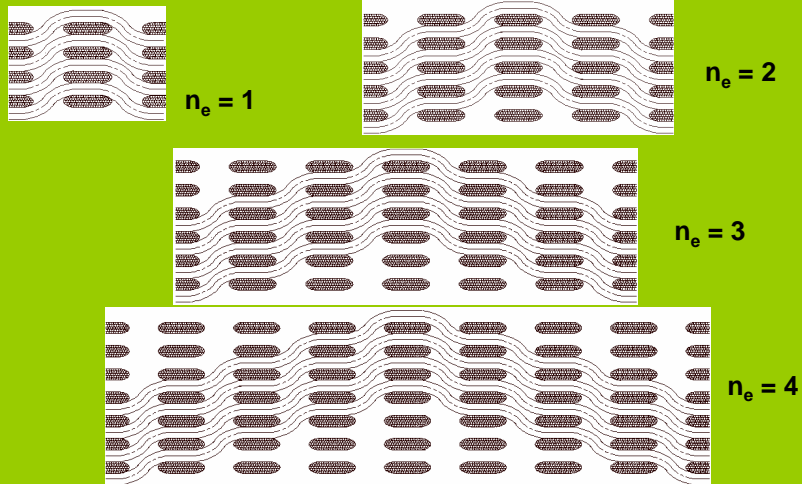
Les propriétés élastiques pour chaque cas de n_e sont recherchés pour les trois cas de sollicitations:

- 1- Traction uniaxial dirigée dans le sens chaîne
- 2- Traction uniaxial dirigée dans le sens trame
- 3- Tension biaxiale dans le plan de la plaque

Avec le type de fibre : T300J-Tex 396, on a $0.5 < Vf < 0.7$

Optimisation du tissage interlock 2.5D

variation du nombre d'entrelacement (n_e)



Optimisation du tissage interlock 2.5D

Variation du type de tissage de l'interlock 2.5D

1- Traction uniaxial dirigée dans le sens chaîne: $\sigma_i (x_1, 0, 0, 0, 0)$

n_e	σ_r (MPa)	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	E_3 (GPa)	G_{13} (GPa)	Pf	Pf ₁	Pf ₂	VER (mm ²)	ρ_c
1	270	49.20	45.47	13.5	11.19	41.8	57.8	42.2	8.5	1384.3
2	580	49.19	32.93	13.5	8.66	29.1	56.4	43.6	13.2	1298.2
3	900	49.31	30.17	13.5	7.14	25.4	52.8	47.2	65.1	1273.1
4	$\frac{121}{0}$	49.51	30.43	13.5	6.35	23.6	47.9	52.1	111.8	1261

Pour des modules longitudinales sensiblement les mêmes :

Avantages



Augmentation lisible des contraintes de rupture σ_r
Diminution du pourcentage de fibre global P_f
Diminution de la densité du composite ρ_c

Désavantages



Diminution du module de cisaillement G_{13}

Optimisation du tissage interlock 2.5D

Variation du type de tissage de l'interlock 2.5D

2- Traction uniaxial dirigée dans le sens trame: $\sigma_i(0, x_2, 0, 0, 0, 0)$

n_e	σ_f (MPa)	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	E_3 (GPa)	G_{13} (GPa)	P_f	P_{f1}	P_{f2}	VER (mm ³)	ρ_c
1	730	49.67	55.44	13.5	10.52	45.1	50.9	49.1	8.9	1406.5
2	740	34.48	54.27	13.5	6.993	36.4	36.3	63.7	30.9	1347.3
3	750	33.61	54.50	13.5	5.90	33.9	29.1	70.9	65.4	1330.4
4	760	32.13	54.61	13.5	5.27	32.4	24.2	75.8	113.3	1320.6

Pour des contraintes de rupture sensiblement les mêmes :

Conclusions



- Diminution lisible des modules longitudinaux E_i
- Diminution du module de cisaillement G_{13}
- Diminution du pourcentage de fibre global P_f
- Diminution de la densité du composite ρ_c

Optimisation du tissage interlock 2.5D

Variation du type de tissage de l'interlock 2.5D

3- Tension biaxial dirigée dans le plan de la plaque: $\sigma_i(x_1, x_2, 0, 0, 0, 0)$

n_e	σ_{r1} (MPa)	σ_{r2} (MPa)	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	E_3 (GPa)	G_{13} (GPa)	P_f	P_{f1}	P_{f2}	ρ_c
1	260	760	49.22	57.22	13.5	10.37	45.4	49.6	50.4	1409.1
2	530	770	49.38	57.38	13.5	7.82	36.9	37.3	62.7	1351.3
3	830	760	49.64	56.95	13.5	6.82	33.1	30.7	69.3	1325.2
4	1150	760	49.89	56.72	13.5	6.24	30.9	26.1	73.9	1310.2

Pour des modules longitudinaux sensiblement les mêmes :

Avantages



- Augmentation lisible des contraintes de rupture σ_{r1}
- Diminution du pourcentage de fibre global P_f
- Diminution de la densité du composite ρ_c

Désavantages



- Diminution du module de cisaillement G_{13}

Bibliographie

Livres sur les composites

1. Jones R. M., **1975**: *Mechanics of composite materials*. Mc Graw-Hill.
2. Tsai S. W., Hahn H. T., **1980**: *Introduction to Composite Materials*. Technomic.
3. Tsai, S. W., **1985**: *Composite design guide*. Technomic.
4. Pedersen P., **1997**: *Elasticity, anisotropy, laminates*. Cours d'élasticité orienté aux stratifié, sur le site web www.fam.dtu.dk/html/pp.html
5. Gay D., **1997**: *Matériaux composites*. Hermès.
6. Berthelot J.M., **1999**: *Matériaux composites. Comportement mécanique et analyse des structures*. Ed. Technique et documentation
7. Barbero E. J., **1998**: *Introduction to composite materials design*. Taylor and Francis.
8. Gürdal Z., Haftka R. T. & Hajela P., **1999**: *Design and optimization of laminated composite materials*. J. Wiley & Sons.