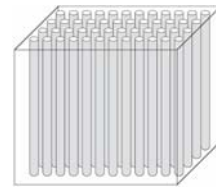

Matériaux Composites

Prof. Rafic YOUNES
Master Mécanique 3M
Beyrouth – 2008



Pli Unidirectionnel

- Théorie de l'homogénéisation
- Volume élémentaire représentatif
- Modèle Série et Modèle Parallèle
- Bibliographie des modèles d'homogénéisation
- Le Méthode de Beltrami
- Modules hors axes principaux
- Bornes sur les modules homogénéisés
- Comparaison des différentes théories

Théorie de l'homogénéisation

- L'analyse de la réponse mécanique des milieux hétérogènes est compliquée.
- Toutefois, la réponse mécanique qu'on cherche est souvent une réponse à une échelle macroscopique (un déplacement, une énergie de déformation etc.).
- Il s'agit d'un **problème d'homogénéisation**: le milieu hétérogène est homogénéisé à un milieu homogène mécaniquement équivalent.

Théorie de l'homogénéisation

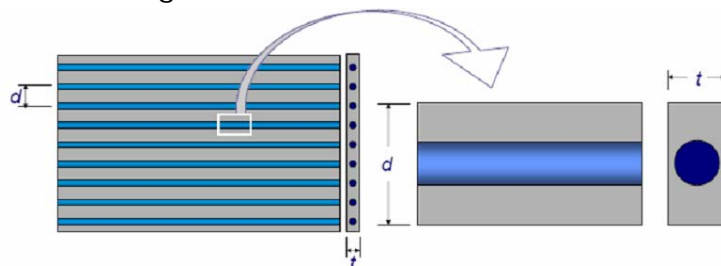
- Dans le cas des composites renforcés par des fibres, le but des théories d'homogénéisation est celui, une fois connues les caractéristiques mécaniques des phases et la fraction volumique des fibres, de prédire les caractéristiques mécaniques homologues d'un solide homogène équivalent, qui reste toutefois, dans le cas en objet de fibre orientées, anisotrope.
- Un concept commun à toutes les théories d'homogénéisation est celui de *volume élémentaire représentatif*.

Volume élémentaire représentatif

- C'est le volume minimum à prendre en considération pour que, une fois appliquée la théorie d'homogénéisation, le résultat obtenu soit représentatif du comportement macroscopique du milieu hétérogène.
- Au volume élémentaire représentatif on applique un modèle mécanique, caractéristique de la théorie d'homogénéisation choisie.
- La définition du volume élémentaire représentatif peut ne pas être simple et dans certains cas elle fait l'objet d'une discussion.

Volume élémentaire représentatif

- Le cas qui nous intéresse ici est celui d'une couche renforcée par des fibres unidirectionnelles uniformément distribuées dans le corps de la couche.
- L'identification du volume élémentaire représentatif, dans ce cas, n'est pas difficile, et peut être faite comme en figure.



Modèle série et Modèle parallèle

- Modèle Série / Loi des Mélanges / Borne supérieur de Voigt:

$$M_C = M_f \cdot V_f + M_m \cdot V_m$$

- Modèle Série / Borne inférieur de Reuss :

$$\frac{1}{M_C} = \frac{V_f}{M_f} + \frac{V_m}{M_m}$$

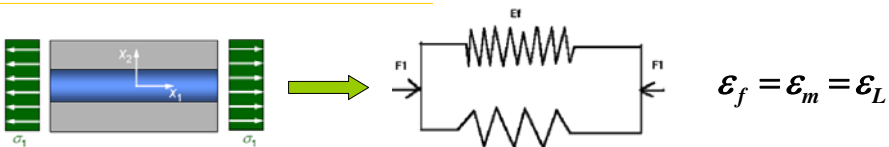
- Modèle de Hirsch :

$$M_C = x \cdot [M_f \cdot V_f + M_m \cdot V_m] + (1-x) \cdot \left[\frac{M_f \cdot M_m}{M_m \cdot V_f + M_f \cdot V_m} \right]$$

- Exemple : Approche de Tsai – Pagano :

$$E_C = \frac{3}{8} \cdot E_{C,Voigt} + \frac{5}{8} \cdot E_{C,Reuss}$$

Modèle série et Modèle parallèle



$$\frac{\sigma_f}{E_f} = \frac{\sigma_m}{E_m} = \frac{\sigma_L}{E_L} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_f}{A_f \cdot E_f} = \frac{F_m}{A_m \cdot E_m} = \frac{F_L}{(A_f + A_m) \cdot E_L}$$

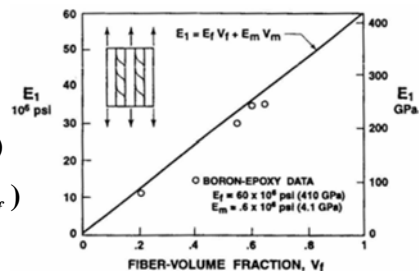
$$\frac{F_f + F_m}{V_f \cdot E_f + V_m \cdot E_m} = \frac{F_L}{E_L}$$

$$E_L = E_f \cdot V_f + E_m \cdot (1 - V_f)$$

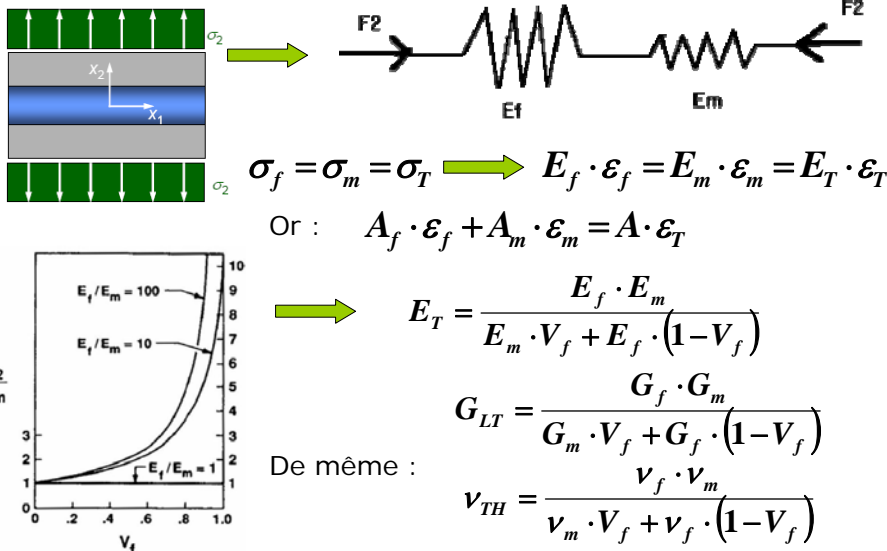
$$\nu_{LT} = \nu_f \cdot V_f + \nu_m \cdot (1 - V_f)$$

$$\text{De même : } G_{TH} = G_f \cdot V_f + G_m \cdot (1 - V_f)$$

$$\sigma_r = \sigma_f \cdot V_f + \sigma_m \cdot (1 - V_f)$$



Modèle série et Modèle parallèle



Bibliographie des Modèles

- Fibres aléatoires ($\eta = 1/3$)

$$E_L = E_f \cdot V_f \cdot \eta + E_m \cdot (1 - V_f) \quad \sigma_r = \sigma_f \cdot V_f \cdot \eta + \sigma_m \cdot (1 - V_f)$$

- Modèle d'Ekval :

$$E_L = E_f \cdot V_f + E'_m \cdot (1 - V_f) \quad E'_m = \frac{E_m}{1 - 2 \cdot \nu_m^2}$$

$$E_T = \frac{E_f \cdot E'_m}{E'_m \cdot V_f + E_f \cdot (1 - V_f) \cdot (1 - \nu_m^2)}$$

Toutefois, quantitativement cette correction n'est pas significative pour $\nu_m < 1/4$.

- Modèle de Puck :

$$E_T = \frac{E_m \cdot (1 + 0,85 \cdot \nu_f^2)}{1 - \nu_m^2 (1 - V_f)^{1,25} + V_f \cdot \frac{E_m}{E_f} \left(1 - \frac{2}{E_m}\right)} \quad G_{LT} = \frac{(1 + 0,6 \cdot \nu_f^{1/2})}{(1 - V_f)^{1,25} + V_f \cdot \frac{G_m}{G_f}}$$

Bibliographie des Modèles

Modèle de Halpin – Tsai

$$M_c = M_m \left(\frac{1 + \zeta \eta v_f}{1 - \eta v_f} \right) \quad \eta = \frac{M_f/M_m - 1}{M_f/M_m + \zeta}$$

$$\sigma_c = \sigma_m \left(\frac{1 + \zeta \eta' v_f}{1 - \eta' v_f} \right) \quad \eta' = \frac{\sigma_f/\sigma_m - 1}{\sigma_f/\sigma_m + \zeta}$$

Dans les équations de Halpin-Tsai, M représente un module parmi E_T , G_{LT} ou ν_{TH} .

$\xi = 2$ pour E_T et $\xi = 1$ pour G_{LT} .

$\xi = 1 + 4V_f^{10}$ pour G_{LT} .

Pour ce qui concerne E_L et ν_{LT} , Halpin et Tsai continuent à prendre les formules de la théorie classique.

Bibliographie des Modèles

Modèle de Halpin – Tsai modifié

$$M_c = M_m \left(\frac{1 + \zeta \eta v_f}{1 - \eta \varphi v_f} \right) \quad \varphi = 1 + \left(\frac{1 - \phi_{max}}{\phi_{max}^2} \right) v_f$$

$$\sigma_c = \sigma_m \left(\frac{1 + \zeta \eta' v_f}{1 - \eta' \varphi v_f} \right) \quad \zeta = K - 1 \quad \text{et} \quad K = 1 + 2\ell/d$$

Le terme ϕ_{max} qui est la fraction maximum de «packing» du renfort. Cette fraction prend différentes valeurs selon la nature de l'arrangement des fibres.

Par exemple, pour un arrangement carré des fibres la fraction vaut 0,785 alors que pour un « packing » aléatoire des fibres sa valeur est donnée à 0,82.

Le terme ℓ/d représente le facteur de forme de la fibre.

Bibliographie des Modèles

Modèle de Cox (1952)

$$M_c = M_f v_f \left(1 - \frac{\tanh \beta \ell / 2}{\beta \ell / 2} \right) + M_m v_m$$

$$\sigma_c = \sigma_f v_f \left(1 - \frac{\tanh \beta \ell / 2}{\beta \ell / 2} \right) + \sigma_m v_m$$

$$\beta = \left[\frac{2\pi G_m}{M_f A_f \ln(R/r)} \right]^{1/2}$$

r : Rayon de la fibre.

R : Distance entre les fibres centre à centre.

A_f : Aire de la fibre.

Bibliographie des Modèles

Modèle de Bowyer et Bader

$$M_c = M_f K_1 K_2 v_f + M_m v_m$$

$$\sigma_c = \sigma_f K_1 K_2 v_f + \sigma_m v_m$$

$$K_2 = l - l_c/2 \quad \text{si } l > l_c$$

$$K_2 = l/2 \quad \text{si } l < l_c$$

l_c : Longueur critique des fibres.

K₁ : Facteur d'orientation de la fibre.

K₂ : Facteur de la longueur des fibres.

Bibliographie des Modèles

Modèle de renforcement selon Nielsen

$$\sigma_{tu} = \sigma_{mu} \left(\frac{E_{22}}{E_m} \right) (1 - \nu_f) \quad \text{adhésion pauvre}$$

$$\sigma_{tu} = \sigma_{mu} \left(\frac{E_{22}}{E_m} \right) (1 - \nu_f^{2/3}) \quad \text{adhésion efficace}$$

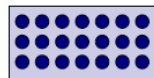
- La résistance transverse d'un composite unidirectionnel (σ_{tu}) est exprimée en fonction de la qualité de l'adhésion, du module de traction de la matrice et du module transverse du composite (Nielsen et Landel 1994). Cette relation se présente sous une forme un peu différente de l'expression employée par Mallick (1997).

$$\sigma_{tu} = \sigma_{mu} \left(\frac{E_{22}}{E_m} \right) (1 - \nu_f^{1/3}) \quad \text{adhésion parfaite}$$

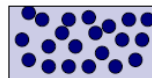
Bibliographie des Modèles

Modèle de Tsai avec contiguïté

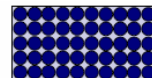
la disposition des fibres n'est généralement pas régulière, mais plutôt les fibres semblent se disposer de façon aléatoire.



C=0



0 < C < 1



C=1

$$E_1 = k[E_f V_f + E_m(1 - V_f)]$$

$$E_2 = 2[1 - \nu_f + (\nu_f - \nu_m)(1 - V_f)] \left[(1 - C) \frac{k_f(2k_m + G_m) - G_m(k_f - k_m)(1 - V_f)}{(2k_m + G_m) + 2(k_f - k_m)(1 - V_f)} + C \frac{k_f(2k_m + G_f) - G_f(k_f - k_m)(1 - V_f)}{(2k_m + G_f) + 2(k_f - k_m)(1 - V_f)} \right]$$

Bibliographie des Modèles

$$\nu_{12} = (1-C) \frac{k_f \nu_f (2k_m + G_m) V_f + k_m \nu_m (2k_f + G_m) (1-V_f)}{k_f (2k_m + G_m) - G_m (k_f - k_m) (1-V_f)} +$$

$$+ C \frac{k_m \nu_m (2k_f + G_f) (1-V_f) + k_f \nu_f (2k_m + G_f) V_f}{k_f (2k_m + G_m) - G_f (k_f - k_m) (1-V_f)},$$

$$G_{12} = (1-C) G_m \frac{2G_f - (G_f - G_m) (1-V_f)}{2G_m + (G_f - G_m) (1-V_f)} + C G_f \frac{(G_f + G_m) - (G_f - G_m) (1-V_f)}{(G_f + G_m) + (G_f - G_m) (1-V_f)},$$

$$k_m = \frac{E_m}{2(1-\nu_m)}, \quad k_f = \frac{E_f}{2(1-\nu_f)}.$$

- Le coefficient k est le *facteur d'alignement des fibres*, introduit par Tsai pour tenir compte des imperfections dans les directions des fibres; sa valeur varie surtout en fonction du processus de fabrication, varie très peu, entre 0.9 et 1.
- La valeur du facteur de contiguïté C doit être déterminée expérimentalement, en fonction de la fraction volumique V_f .

Méthode de Beltrami

$$E_L = E_f V_f + E_m (1-V_f) + \frac{4V_f(1-V_f)(\nu_f - \nu_m)^2}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_m} + \frac{1-V_f}{K_f}}$$

$$K_f = \frac{E_f}{2(1-2\nu_f)(1+\nu_f)}$$

$$K_m = \frac{E_m}{2(1-2\nu_m)(1+\nu_m)}$$

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m (1-V_f) + \frac{V_f(1-V_f)(\nu_f - \nu_m) \left(\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f} \right)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_m} + \frac{1-V_f}{K_f}}$$

$$G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)}$$

$$G_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)}$$

Méthode de Berthelot

$$G_{LT} = G_m \frac{G_f(1+V_f) + G_m(1-V_f)}{G_f(1-V_f) + G_m(1+V_f)}$$

$$\kappa_m = \frac{E_m}{3(1-2\nu_m)}$$

$$G_{TH} = G_m \left(1 + \frac{V_f}{\frac{G_m}{G_f - G_m} + \frac{\kappa_m + 7G_m/3}{2\kappa_m + 8G_m/3}} (1 - V_f) \right)$$

$$\kappa_f = \frac{E_f}{3(1-2\nu_f)}$$

$$E_T = \frac{2}{\frac{1}{2K_L} + \frac{1}{2G_{TH}} + 2\frac{\nu_{LT}^2}{E_L}} \quad K_L = K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{(\kappa_f - \kappa_m) + \frac{G_f - G_m}{3}} + \frac{1 - V_f}{\kappa_m + \frac{4}{3}G_m}}$$

$$\nu_{TH} = \frac{E_T}{2 \cdot G_{TH}} - 1$$

Modules hors axes principaux

$$\frac{1}{E_x} = \frac{1}{E_L} \cdot \cos^4 \theta + \frac{1}{E_T} \cdot \sin^4 \theta + \left[\frac{1}{G_{LT}} - 2\frac{\nu_{LT}}{E_L} \right] \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta$$

$$\frac{1}{E_y} = \frac{1}{E_L} \cdot \sin^4 \theta + \frac{1}{E_T} \cdot \cos^4 \theta + \left[\frac{1}{G_{LT}} - 2\frac{\nu_{LT}}{E_L} \right] \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta$$

$$\frac{1}{G_{xy}} = \frac{1}{G_{LT}} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) - 2 \left(\frac{2}{E_L} + \frac{2}{E_T} + 4\frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta$$

$$\nu_{xy} = E_x \left[\frac{\nu_{LT}}{E_L} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) - \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \right]$$

$$\frac{1}{G_{xz}} = \frac{1}{G_{LH}} \cos^2 \theta + \frac{2(1 + \nu_{TH})}{E_T} \cdot \sin^2 \theta$$

$$\nu_{xz} = E_x \left[\frac{\nu_{LH}}{E_L} \cos^2 \theta + \frac{\nu_{LH}}{E_{LT}} \sin^2 \theta \right]$$