



## Chapitre 2 : Limitations en statique

R. Younès – Faculté de Génie



### Plan du chapitre



- **1. Introduction**
  - 2. Critères pour Matériaux ductiles
  - 3. Critères pour Matériaux fragiles
  - 4. Compléments
  - 5. Matériaux
  - 6. Exemples
  - 7. Résumé
- 

# 1. Introduction



$$\sigma = K_t \cdot \sigma_0 < \frac{\sigma_e}{S}$$

- Que devient le critère de conception (valable en traction éprouvette) dans le cas des Sollicitations composées ou multiaxiales ??
- Définir  $\sigma_{eq}$  (contrainte équivalente) en fonction de  $\sigma$  et  $K_t$  en se basant sur des essais de traction simple ( $\sigma_e$  et  $R_{max}$ ).
- => Critère de limitation statique ou d'écoulement

$$\sigma_{eq} < \frac{\sigma_e}{S}$$



## Plan du chapitre



- 1. Introduction
- **2. Critères pour Matériaux ductiles**
- 3. Critères pour Matériaux fragiles
- 4. Compléments
- 5. Choix des Matériaux
- 6. Exemples
- 7. Résumé

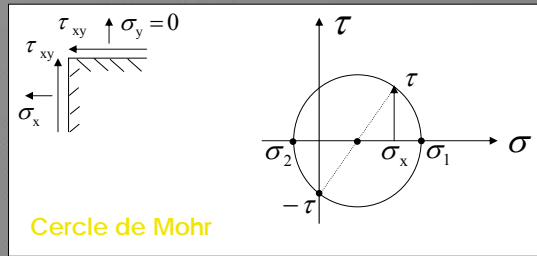


## 2. Critères pour Matériaux ductiles



- Théorie de la contrainte normale maximale:

RDM  $\Rightarrow \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \Rightarrow$  Contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$$



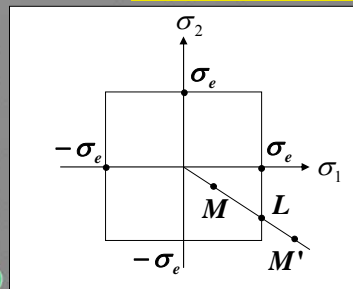
## 2. Critères pour Matériaux ductiles



Critère:

écoulement si une des  $\sigma$  principales atteint  $\sigma_e$

$$\sigma_{eq} = \text{Max}(\sigma_1, \sigma_2) < \frac{\sigma_e}{s}$$



$$s_M = \frac{OL}{OM} > 1$$



$$s_{M'} = \frac{OL}{OM'} < 1$$



## 2. Critères pour Matériaux ductiles

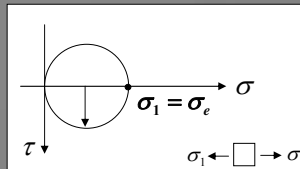


- Critère de Tresca: ( $\sigma$  cisaillement maximale)

L'expérience montre que l'écoulement dans un essai de traction simple sur éprouvette est atteint pour :  $\sigma_e / 2 = \tau_e$

Critère:  
écoulement lorsque  $\tau_{\max} = \sigma_e / 2$

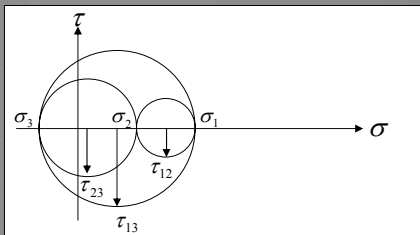
$$\tau_{\max} = \sigma_e / 2 = \text{rayon}$$



## 2. Critères pour Matériaux ductiles



Cas d'une contrainte triaxiale:



$$\tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2$$

Écoulement si  $\tau_{\max} = \sigma_e / 2$

Donc  $\sigma_{eq} \equiv \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_e$  si  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

$$\sigma_{eq} = (\sigma_1 - \sigma_3) < \frac{\sigma_e}{s} \quad \text{si } (\sigma_1 > 0, \sigma_3 < 0) \text{ ou } (\sigma_1 < 0, \sigma_3 > 0)$$

$$\sigma_{eq} = \text{Max}(\sigma_1, \sigma_3) < \frac{\sigma_e}{s} \quad \text{si } (\sigma_1 > \sigma_3 > 0) \text{ ou } (\sigma_1 < \sigma_3 < 0)$$

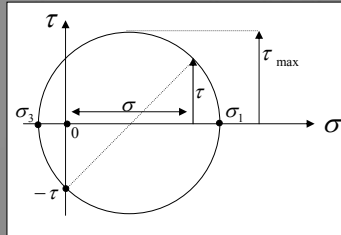
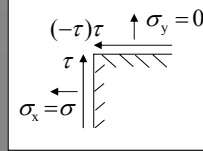


## 2. Critères pour Matériaux ductiles



Cas particulier:

- Etat plan  $\sigma$  dégénéré
- $\sigma_x = \sigma$  ;  $\sigma_y = 0$  ;  $\tau_{xy} = \tau$



$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} = \sigma_e$$

à l'écoulement



## 2. Critères pour Matériaux ductiles



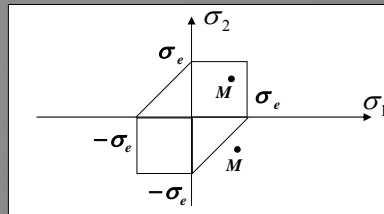
En particulier:

Si  $\tau = 0 \Rightarrow \sigma_c = \sigma = \sigma_e$  (en traction pure)

Si  $\sigma = 0 \Rightarrow \sigma_c = 2 \tau$  (cisaillement pur)

$\Rightarrow \tau = \sigma_e / 2 = \tau_e$  limite élastique en cisaillement pur

Graphiquement pour le biaxial:



$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} = \sigma_e$$

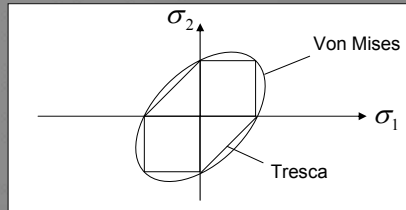


## 2. Critères pour Matériaux ductiles



- Von Mises: (énergie de distorsion)

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} < \frac{\sigma_e}{S}$$



Si  $\tau = 0, \sigma_c = \sigma = \sigma_e \Rightarrow \sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sigma_e$

Si  $\sigma = 0, \sigma_c = \sqrt{3} \tau = \sigma_e$

$\Rightarrow \tau = \tau_e = 0,577 \sigma_e \approx 0,5 \sigma_e$  (Tresca)



## 2. Critères pour Matériaux ductiles



- Application au calcul des pièces ductiles:

a) Si concentration de  $\sigma$  :  $K_t = 1$  si chargement STATIQUE car il y a redistribution locale des  $\sigma$ .

b) critère:

Von Mises -> plus précis

Tresca -> sécuritaire

(Normal -> inutilisable)

c) Facteur de sécurité:

$$\sigma_{eq} < \frac{\sigma_e}{S}$$



## Plan du chapitre



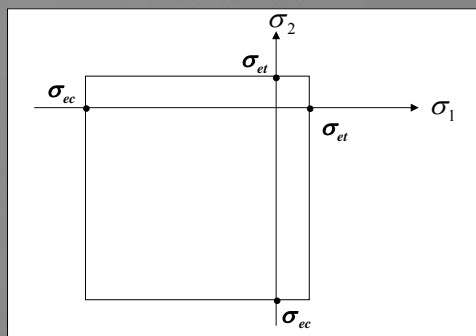
- 1. Introduction
- 2. Critères pour Matériaux ductiles
- **3. Critères pour Matériaux fragiles**
- 4. Compléments
- 5. Choix des Matériaux
- 6. Exemples
- 7. Résumé



## 3. Critères pour Matériaux fragiles



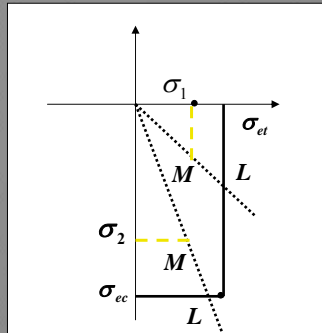
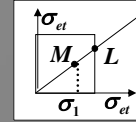
- Théorie de la Contrainte Normale Maximale:



### 3. Critères pour Matériaux fragiles



$$\sigma_{eq} = \text{Max}(\sigma_1, \sigma_2) < \frac{\sigma_{et}}{S} \quad \text{si } \sigma_1, \sigma_2 > 0$$

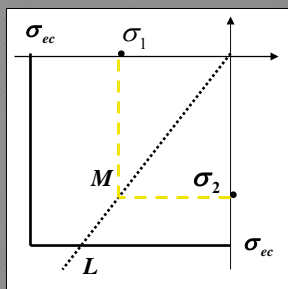


$$\sigma_{eq} = \sigma_1 < \frac{\sigma_{et}}{S} \quad \text{si } \sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$$

$$\sigma_{eq} = |\sigma_2| < \frac{|\sigma_{ec}|}{S}$$



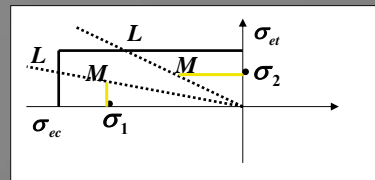
### 3. Critères pour Matériaux fragiles



$$\sigma_{eq} = \text{Max}(|\sigma_1|, |\sigma_2|) < \frac{|\sigma_{ec}|}{S} \quad \text{si } \sigma_1, \sigma_2 < 0$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_2 < \frac{\sigma_{et}}{S} \quad \text{si } \sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0$$

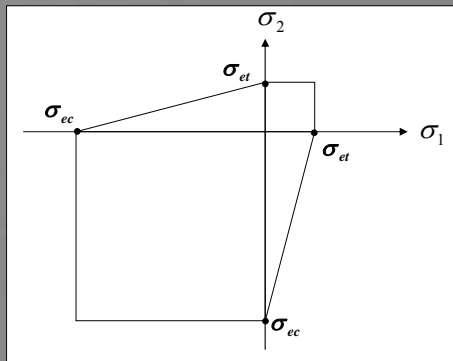
$$\sigma_{eq} = |\sigma_1| < \frac{|\sigma_{ec}|}{S}$$



### 3. Critères pour Matériaux fragiles



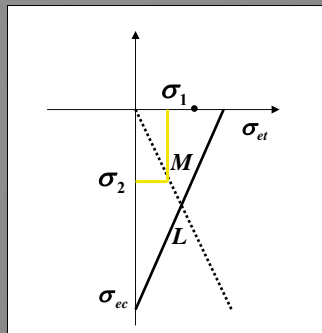
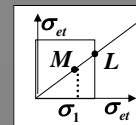
- Théorie Coulomb-Mohr:



### 3. Critères pour Matériaux fragiles



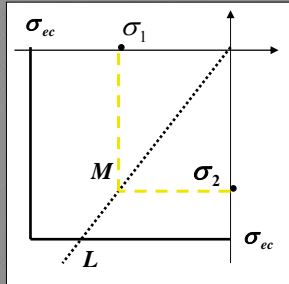
$$\sigma_{eq} = \text{Max}(\sigma_1, \sigma_2) < \frac{\sigma_{et}}{S} \quad \text{si } \sigma_1, \sigma_2 > 0$$



$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{et}} + \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_{ec}|} = 1 \quad \text{si } \sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$$

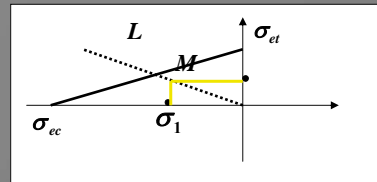


### 3. Critères pour Matériaux fragiles



$$\sigma_{eq} = \text{Max}(|\sigma_1|, |\sigma_2|) < \frac{|\sigma_{ec}|}{S} \quad \text{si } \sigma_1, \sigma_2 < 0$$

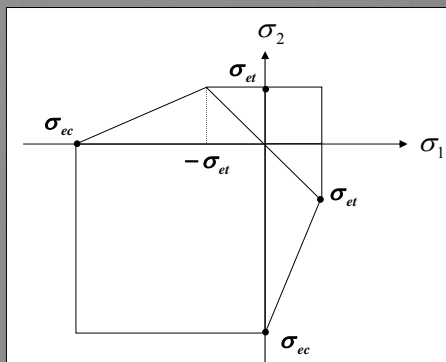
$$\frac{\sigma_2}{\sigma_{et}} + \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_{ec}|} = 1 \quad \text{si } \sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0$$



### 3. Critères pour Matériaux fragiles



- Théorie Mohr modifiée:



L'expérience montre :

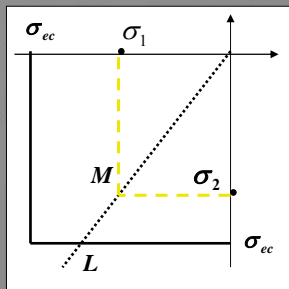
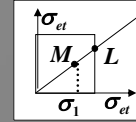
$$\tau_e \text{ (torsion)} = \sigma_e \text{ (traction)}$$



### 3. Critères pour Matériaux fragiles



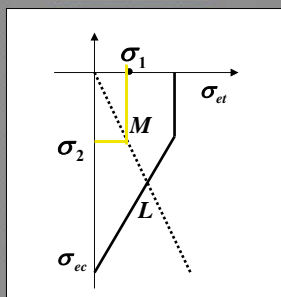
$$\sigma_{eq} = \text{Max}(\sigma_1, \sigma_2) < \frac{\sigma_{et}}{S} \quad \text{si } \sigma_1, \sigma_2 > 0$$



$$\sigma_{eq} = \text{Max}(|\sigma_1|, |\sigma_2|) < \frac{|\sigma_{ec}|}{S} \quad \text{si } \sigma_1, \sigma_2 < 0$$

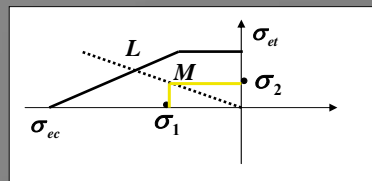


### 3. Critères pour Matériaux fragiles



$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{et}} + \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_{ec}|} = 1 \quad \text{si } \sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$$

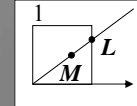
$$\frac{\sigma_2}{\sigma_{et}} + \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_{ec}|} = 1 \quad \text{si } \sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0$$



### 3. Critères pour Matériaux fragiles



- Application au calcul des pièces fragiles:
  - a) Concentration de  $\sigma$ : en général on en tient compte sauf pour les fontes
  - b) Critère Mohr modifié (plus précis)
  - c) Calcul des  $\sigma$  principales par:



$$\sigma_{1,2} = \frac{K_x \sigma_x + K_y \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{K_x \sigma_x + K_y \sigma_y}{2}\right)^2 + (K_{xy} \tau_{xy})^2}$$

$K_{x, y, xy}$  = facteurs de concentrations relatifs à chaque type de chargement

d) FS:

$$s = OL / OM$$

### Plan du chapitre



- 1. Introduction
- 2. Critères pour Matériaux ductiles
- 3. Critères pour Matériaux fragiles
- **4. Compléments**
- 5. Choix des Matériaux
- 6. Exemples
- 7. Résumé

## 4. Compléments

Critère parabolique :  $(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (\sigma'_e + \sigma_e)(\sigma_1 + \sigma_3) \leq -\sigma'_e \sigma_e$

Critère de Beltrami :  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \leq \sigma_e^2$

Critère de Nadai :

$$-4\sigma'_e \sigma_e (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (3\sigma_e'^2 + 2\sigma'_e \sigma_e + 3\sigma_e^2) (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + \dots + 4(\sigma_e' + \sigma_e)(\sigma_e' - \sigma_e)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 4\sigma_e'^2 \sigma_e^2$$

Critère de Stassi :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2(\sigma_e' + \sigma_e)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 2\sigma_e' \sigma_e$$



## Plan du chapitre



- 1. Introduction
- 2. Critères pour Matériaux ductiles
- 3. Critères pour Matériaux fragiles
- 4. Compléments
- **5. Choix des Matériaux**
- 6. Exemples
- 7. Résumé



## 5. Choix des Matériaux



## 7. Résumé

